בס"ד

שיטות נומריות, 376-88
מבחן מועד ב', סמסטר א' תשס"ג

ד"ר יעקוב קרסנוב
פרופ' ג'רמי שיף

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, כל שאלה שווה 20 נקודות.
יש לנמק היטב כל תשובה!

1. אם

$$A = \begin{pmatrix} 2.13 & -1.12 \\ 0.126 & 1.17 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2.17 & -1.08 \\ 0.136 & 1.18 \end{pmatrix}$$

א. מה היא השגיאה היחסית של $\bar{A}$ כקירוב ל-A בנורמה 1 ?
(תזכורת: $||A||_1 = \max_j \sum_i |A_{ij}|$.)
ב. מה היא השגיאה היחסית של $\bar{A}$ כקירוב ל-A בנורמה ∞ ?
(תזכורת: $||A||_\infty = \max_i \sum_j |A_{ij}|$.)
ג. האם אתה יכול למצוא מטריצה B מגודל 2×2, לא אפס, וכך ש- $||B||_1 = 2||B||_\infty$?
או מטריצה C (מגודל 2×2, לא אפס) כך ש- $||C||_\infty = 2||C||_1$?
ד. הוכח שלמטריצה M מגודל $n \times n$

$$\frac{1}{n}||M||_1 \leq ||M||_\infty \leq n||M||_1$$

2. א. מצא כל נקודות השבת של הרקורסיה

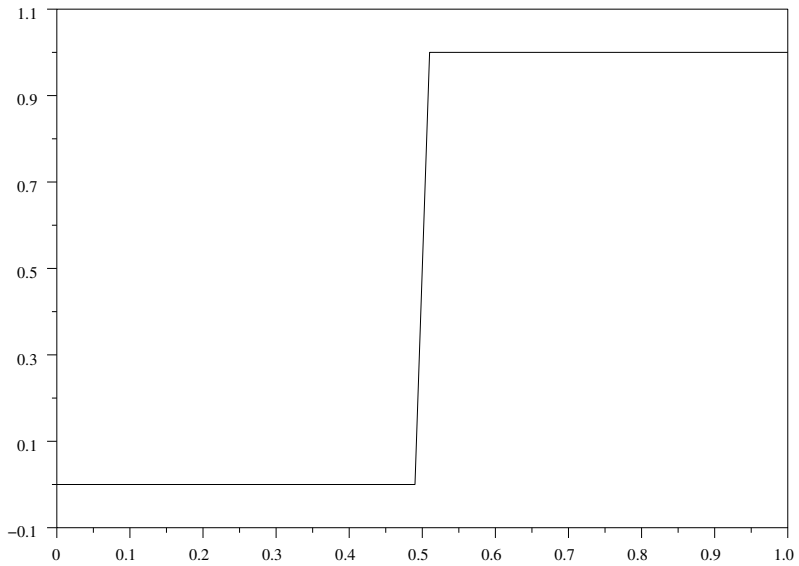
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + 3x_n^2 - 2x_n^3\right)$$

ב. האם נקודות השבת האלה יציבות או לא-יציבות? (כלומר: אם מתחילים את הרקורסיה קרוב להן האם הרקורסיה תתכנס להן או לא?)

ג. כאשר ב-Matlab או Scilab כותבים

```
x = [0 : 0.01 : 1];
for i = 1 : 100
    x = (x + 3 * x. * x - 2 * x. * x. * x)/2;
end
plot(x)
```

מקבלים את הגרף למטה. הסבר!



3. א. האם שינוי קטן במטריצה יכול לגרום לשינוי גדול בערכים עצמיים שלה? איך מגדירים מספר מצב לבעייה של חישוב ערכים עצמיים של מטריצה? מה הוא מספר מצב זה כאשר המטריצה היא סימטרית?

ב. כאשר כותבים את הפקודות הבאות ב-Matlab:

```
b0 = [  5.33   1.53   0.01   0.00;
       -3.29   0.40   0.33   0.36;
        122    50.4   69.9   68.9;
       -121   -50.0  -66.6  -65.6 ];
c0 = eig(b0)

b1 = b0;
b1(1,3) = b1(1,3) + 0.1;
c1 = eig(b1)

b2 = b0;
b2(3,2) = b2(3,2) + 0.1;
c2 = eig(b2)

b3 = b0;
b3(4,3) = b3(4,3) + 0.1;
c3 = eig(b3)
```

(ב-Scilab ניתן לכתוב אותו דבר, רק שיש להחליף את הפקודה `eig` ב-`spec`), מקבלים את התוצאות

$$c0 = \begin{pmatrix} 3.90 \\ 1.02 \\ 3.19 \\ 1.92 \end{pmatrix} \qquad c1 = \begin{pmatrix} 6.51 \\ -1.06 \\ 1.81 \\ 2.76 \end{pmatrix} \qquad c2 = \begin{pmatrix} 0.927 \\ 3.86 \\ 2.05 \\ 3.19 \end{pmatrix} \qquad c3 = \begin{pmatrix} 0.630 \\ 5.23 \\ 1.88 \\ 3.55 \end{pmatrix}$$

מה ניתן להסיק, מתוצאות אלה, לגבי מספר המצב הרלוונטי של המטריצה `b0`? (יש לתת אומדן נומרי למספר המצב.)

4. לנתונים

x_i	0	1	2	4
y_i	1.2	2.1	2.3	0.5

א. כתוב את פולינום הביון (אינטרפולציה) בצורת Lagrange.
ב. מצא את פולינום הביון (אינטרפולציה) בצורת Newton.
ג. מצא את ה-linear spline המחבר את הנתונים.
מצא את הערכים של פולינום הביון וה-linear spline ב-$x = 3$. איך היית משתמש ב-Matlab או Scilab כדי למצוא את הערך ב-$x = 3$ של ה-cubic spline המחבר את הנתונים ?

5. הפונקציה $f_c(x)$ מוגדרת על הקטע $[-1, 1]$ על ידי

$$f_c(x) = \begin{cases} -1\ , & -1 < x < c \\ 0\ , & x = c \\ 1\ , & c < x < 1 \end{cases}$$

כאשר c הוא מספר ממשי בין -1 ו-1.
א. מצא קירוב ליניארי $p(x)$ ל-$f_c(x)$ על ידי שיטת ריבועים מזעריים (ריבועים זעירים) עם פונקציית משקל $w(x) = 1$.
ב. עבור איזה ערכים של c קיים x, בין -1 ו-1 כך ש- $p(x) = 0$? האם התשובה שקבלת סבירה ?

6. א. מה הוא כלל הטרפז? איך בדרך כלל מתנהגת הטעות בכלל הטרפז כאשר מגדילים את n, מספר הקטעים ?
ב. חשב קירוב ל-

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx$$

על ידי כלל הטרפז עם $n = 5$.
ג. כאשר משתמשים בכלל הטרפז עם $n = 10, 20, 40$ לחשב את האנטגרל בסעיף ב. מקבלים את התוצאות $0.66051, 0.66445, 0.66587$ בהתאם. האם הטעות מתנהגת כמו שכתבת בסעיף א.? הסבר.

בהצלחה!!