בס"ד

שיטות נומריות, 88-376 | ד"ר יעקוב קרסנוב
מבחן מועד ב', סמסטר א' תשס"ג | פרופ' ג'רמי שיף

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, כל שאלה שווה 20 נקודות.
יש לנמק היטב כל תשובה!

1. אם

$$A = \begin{pmatrix} 2.13 & -1.12 \\ 0.126 & 1.17 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2.17 & -1.08 \\ 0.136 & 1.18 \end{pmatrix}$$

א. מה היא השגיאה היחסית של $\bar{A}$ כקירוב ל-A בנורמה 1 ?
(תזכורת: $||A||_1 = \max_j \sum_i |A_{ij}|$.)
ב. מה היא השגיאה היחסית של $\bar{A}$ כקירוב ל-A בנורמה ∞ ?
(תזכורת: $||A||_\infty = \max_i \sum_j |A_{ij}|$.)
ג. האם אתה יכול למצוא מטריצה B מגודל 2×2, לא אפס, וכך ש- $||B||_1 = 2||B||_\infty$?
או מטריצה C (מגודל 2×2, לא אפס) כך ש- $||C||_\infty = 2||C||_1$?
ד. הוכח שלמטריצה M מגודל $n \times n$

$$\frac{1}{n}||M||_1 \leq ||M||_\infty \leq n||M||_1$$

א.

$$\frac{||\bar{A} - A||_1}{||A||_1} = \frac{\left|\left|\begin{pmatrix} 0.04 & 0.04 \\ 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}\right|\right|_1}{\left|\left|\begin{pmatrix} 2.13 & -1.12 \\ 0.126 & 1.17 \end{pmatrix}\right|\right|_1} = \frac{\max(0.05, 0.05)}{\max(2.256, 2.29)} = \frac{0.05}{2.29} \approx 0.022$$

ב.

$$\frac{||\bar{A} - A||_\infty}{||A||_\infty} = \frac{\left|\left|\begin{pmatrix} 0.04 & 0.04 \\ 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}\right|\right|_\infty}{\left|\left|\begin{pmatrix} 2.13 & -1.12 \\ 0.126 & 1.17 \end{pmatrix}\right|\right|_\infty} = \frac{\max(0.08, 0.02)}{\max(3.35, 1.296)} = \frac{0.08}{3.35} \approx 0.024$$

ג. אם

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי $||B||_1 = 2$, $||B||_\infty = 1$. אם

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי $||C||_1 = 1$, $||C||_\infty = 2$.

ד. אם $||M||_1 = c$ אזי כל רכיב של M הוא וודאי קטן או שווה c בערך מוחלט. ולכן $||M||_\infty$, שהוא סכום (בערך מוחלט) של הרכיבים בשורה מסויימת של המטריצה, בהכרח קטן או שווה nc. כלומר $||M||_\infty \le n||M||_1$. כמו כן מוכיחים ש $||M||_1 \le n||M||_\infty$.

---

2. א. מצא כל נקודות השבת של הרקורסיה

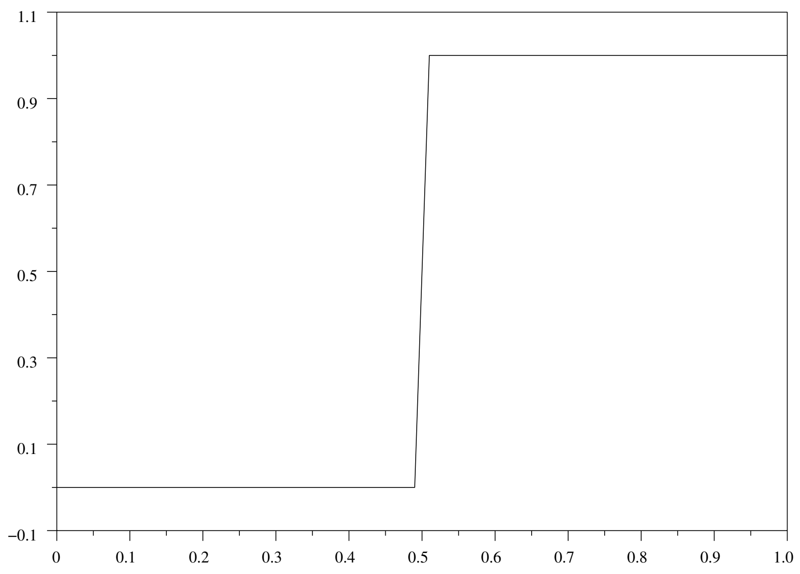
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + 3x_n^2 - 2x_n^3\right)$$

ב. האם נקודות השבת האלה יציבות או לא-יציבות? (כלומר: אם מתחילים את הרקורסיה קרוב להן האם הרקורסיה תתכנס להן או לא?)

ג. כאשר ב-Matlab או Scilab כותבים

```
x = [0 : 0.01 : 1];
for i = 1 : 100
    x = (x + 3 * x. * x - 2 * x. * x. * x)/2;
end
plot(x)
```

מקבלים את הגרף למטה. הסבר!



א. x היא נקודת שבת אם

$$x = \tfrac{1}{2}\left(x + 3x^2 - 2x^3\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x^3 - 3x^2 + x = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x(2x-1)(x-1) = 0$$

כלומר $x = 0, \frac{1}{2}, 1$.

ב. נקודת השבת x^* של הרקורסיה $x_{n+1} = \phi(x_n)$ היא יציבה אם $|\phi'(x^*)| < 1$ ואי יציבה אם $|\phi'(x^*)| > 1$. כאן יש לנו

$$\phi'(x) = \tfrac{1}{2}\left(1 + 6x - 6x^2\right)$$

ולכן

$$\phi'(0) = \tfrac{1}{2}\ , \qquad \phi'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{5}{4}\ , \qquad \phi'(1) = \tfrac{1}{2}\ .$$

כלומר 0 ו-1 יציבות, $\frac{1}{2}$ בלתי יציבה.

ג. התוכנה לוקחת x'ים התחלתיים בין 0 ל-1 (בקפיצות של 0.01), ומפעיל את הרקורסיה על כל x מאה פעמים. הגרף מראה שלכל x התחלתי קטן מ-$\frac{1}{2}$ הרקורסיה מתכנסת ל-0, ולכל x התחלתי מעל $\frac{1}{2}$ הרקורסיה מתכנסת ל-1.

---

3. א. האם שינוי קטן במטריצה יכול לגרום לשינוי גדול בערכים עצמיים שלה? איך מגדירים מספר מצב לבעייה של חישוב ערכים עצמיים של מטריצה? מה הוא מספר מצב זה כאשר המטריצה היא סימטרית?

ב. כאשר כותבים את הפקודות הבאות ב-Matlab:

$$\texttt{b0} = \begin{bmatrix} 5.33 & 1.53 & 0.01 & 0.00; \\ -3.29 & 0.40 & 0.33 & 0.36; \\ 122 & 50.4 & 69.9 & 68.9; \\ -121 & -50.0 & -66.6 & -65.6 \end{bmatrix};$$

```
c0 = eig(b0)

b1 = b0;
b1(1,3) = b1(1,3) + 0.1;
c1 = eig(b1)

b2 = b0;
b2(3,2) = b2(3,2) + 0.1;
c2 = eig(b2)

b3 = b0;
b3(4,3) = b3(4,3) + 0.1;
c3 = eig(b3)
```

(ב-Scilab ניתן לכתוב אותו דבר, רק שיש להחליף את הפקודה `eig` ב-`spec`), מקבלים את התוצאות

$$c0 = \begin{pmatrix} 3.90 \\ 1.02 \\ 3.19 \\ 1.92 \end{pmatrix} \qquad c1 = \begin{pmatrix} 6.51 \\ -1.06 \\ 1.81 \\ 2.76 \end{pmatrix} \qquad c2 = \begin{pmatrix} 0.927 \\ 3.86 \\ 2.05 \\ 3.19 \end{pmatrix} \qquad c3 = \begin{pmatrix} 0.630 \\ 5.23 \\ 1.88 \\ 3.55 \end{pmatrix}$$

מה ניתן להסיק, מתוצאות אלה, לגבי מספר המצב הרלוונטי של המטריצה `b0`? (יש לתת אומדן נומרי למספר המצב.)

א. שינוי קטן במטריצה כן יכול לגרום לשינוי גדול בערכים עצמיים שלה. ניתן להגדיר מספר מצב לבעייה של חישוב הערכים העצמיים של מטריצה A על ידי $\kappa(U) = ||U|| \cdot ||U^{-1}||$, כאשר U היא מטריצה המלכסנת את A, כלומר כך ש-UAU^{-1} אלכסוני. זה מספר מצב במובן שאם עושים שינוי קל δA במטריצה אזי השינוי הכי גדול בערכים העצמיים הוא קטן או שווה $\kappa(U)||\delta A||$. אם A היא סימטרית ואם עובדים בנורמה 2 $\kappa(U) = 1$.

ב. הנורמה של כל ההפרשים $b1 - b0$, $b2 - b0$, $b3 - b0$ הוא 0.1. (זה נכון בנורמה כל שהיא). הנורמה של ההפרשים $b3 - b2$, $b4 - b2$, $b4 - b3$ יהיה מספר בין 0.1 ו-0.2 (הערך המדוייק

קשה לחשב ואינו רלוונטי) השינויים הכי גדולים בערכים העצמיים הם:

בין $c0$ ובין $c1$:	2.61
בין $c0$ ובין $c2$:	0.13
בין $c0$ ובין $c3$:	1.33
בין $c1$ ובין $c2$:	2.65
בין $c1$ ובין $c3$:	1.69
בין $c2$ ובין $c3$:	1.37

הכי גדול: בערך 2.6. מספר המצה הרלוונטי בערך $30 \approx 2.6/0.1$.

---

4. לנתונים

x_i	0	1	2	4
y_i	1.2	2.1	2.3	0.5

א. כתוב את פולינום הביון (אינטרפולציה) בצורת Lagrange.
ב. מצא את פולינום הביון (אינטרפולציה) בצורת Newton.
ג. מצא את ה-linear spline המחבר את הנתונים.
מצא את הערכים של פולינום הביון וה-linear spline ב-$x = 3$. איך היית משתמש ב-Matlab או Scilab כדי למצוא את הערך ב-$x = 3$ של ה-cubic spline המחבר את הנתונים ?

א.

$$p(x) = 1.2\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-1)(-2)(-4)} + 2.1\frac{x(x-2)(x-4)}{(1)(1-2)(1-4)} + 2.3\frac{x(x-1)(x-4)}{(2)(2-1)(2-4)} + 0.5\frac{x(x-1)(x-2)}{(4)(4-1)(4-2)}$$

ב. טבלת הפרשים מחולקים:

0	1.2			
1	2.1	0.9		
2	2.3	0.2	-0.35	
4	0.5	-0.9	-0.367	-0.004

ולכן פולינום הביון הוא

$$p(x) = 1.2 + 0.9x - 0.35x(x-1) - 0.004x(x-1)(x-2)$$

ג. הספליין הליניארי:

$$f(x) = \begin{cases} 1.2\frac{x-1}{-1} + 2.1\frac{x}{1} & 0 < x < 1 \\ 2.1\frac{x-2}{-1} + 2.3\frac{x-1}{1} & 1 < x < 2 \\ 2.3\frac{x-4}{-2} + 0.5\frac{x-2}{2} & 2 < x < 4 \end{cases}$$

הערך של פולינום הביון כאשר $x = 3$ הוא בערך

$$1.2 + 2.7 - 2.1 - 0.024 \approx 1.8$$

הערך של הספליין הליניארי הוא

$$1.15 + 0.25 = 1.4$$

לקבל את הערך של ה-cubic spline ב-Matlab כותבים

```
x  =  [   0    1    2    4   ]
y  =  [  1.2  2.1  2.3  0.5  ]
spline(x, y, 3)
```

אבל ל-4 נקודות ה-cubic spline אשר Matlab בונה הוא זהה לפולינום הביון!

---

5. הפונקציה $f_c(x)$ מוגדרת על הקטע $[-1, 1]$ על ידי

$$f_c(x) = \begin{cases} -1 \ , & -1 < x < c \\ 0 \ , & x = c \\ 1 \ , & c < x < 1 \end{cases}$$

כאשר c הוא מספר ממשי בין -1 ו-1.

א. מצא קירוב ליניארי $p(x)$ ל-$f_c(x)$ על ידי שיטת ריבועים מזעריים (ריבועים זעירים) עם פונקציית משקל $w(x) = 1$.

ב. עבור איזה ערכים של c קיים x, בין -1 ו-1 כך ש- $p(x) = 0$? האם התשובה שקבלת סבירה ?

א. קירוב לפונקציה $f(x)$ על הקטע $[-1, 1]$, בשיטה של ריבועים מזעריים עם $w(x) = 1$, מקבלים על ידי

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} a_i P_i(x) \ , \qquad a_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^{1} P_i(x) f(x) dx \ .$$

לקירוב ליניארי לוקחים $n=1$. לפונקציה שלנו יש

$$p(x) = a_0 + a_1 x \ ,$$

כאשר

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_c(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{c}(-1)dx + \frac{1}{2}\int_{c}^{1} 1dx = -\frac{1}{2}(c+1) + \frac{1}{2}(1-c) = -c$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} xf_c(x)dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{c}(-x)dx + \frac{3}{2}\int_{c}^{1} xdx = -\frac{3}{4}(c^2-1) + \frac{3}{4}(1-c^2) = \frac{3}{2}(1-c^2)$$

כלומר $p(x) = -c + \frac{3}{2}(1-c^2)x$

ב. אנחנו רואים ש-$p(x)=0$ כאשר $x = 2c/(3(1-c^2))$. אנחנו רוצים שזה יהיה בין -1 ו-1, כלומר

$$\begin{aligned} & \left|\frac{2c}{3(1-c^2)}\right| \le 1 \\ \Leftrightarrow \ & 4c^2 \le 3(1-c^2)^2 \\ \Leftrightarrow \ & 3c^4 - 10c^2 + 3 \ge 0 \\ \Leftrightarrow \ & (3c^2-1)(c^2-3) \ge 0 \end{aligned}$$

אצלנו $|c| \le 1$, ולכן $c^2 - 3 < 0$. כדי לקיים את התנאי למעלה יש לדרוש ש-$|c| \le \frac{1}{\sqrt{3}}$. והדבר סביר מאוד. ל-$c$ קטן בערך מוחלט הפונקציה $f_c(x)$ בערך חציו מעל 0, חציו מתחת ל-0. ולכן הקירוב $p(x)$ חייב גם להיות "חלק למעלה חלק למטה". אבל ל-c יותר גדול, בערך מוחלט, הפונקציה נוטה יותר לכיוון של להיות מסימן נתון, וכן $p(x)$ יוצא או חיובי או שלילי.

---

6. א. מה הוא כלל הטרפז? איך בדרך כלל מתנהגת הטעות בכלל הטרפז כאשר מגדילים את n, מספר הקטעים ?

ב. חשב קירוב ל-

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx$$

על ידי כלל הטרפז עם $n=5$.

ג. כאשר משתמשים בכלל הטרפז עם $n = 10, 20, 40$ לחשב את האנטגרל בסעיף ב. מקבלים את התוצאות $0.66051, 0.66445, 0.66587$ בהתאם. האם הטעות מתנהגת כמו שכתבת בסעיף א.? הסבר.

א. כלל הטרפז: בוחרים שלם חיובי n,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right) \quad , \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

אם f גזירה פעמיים עם נגזרת שנייה חסומה על $[a,b]$, השגיאה בכלל הטרפז מתנהגת כ-n^{-2}.

ב.

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx \approx \frac{1}{10}\left(0 + 2(\sqrt{0.2} + \sqrt{0.4} + \sqrt{0.6} + \sqrt{0.8}) + 1\right) \approx 0.6497$$

ג. אנחנו רואים שהשגיאות כאשר $n = 5, 10, 20, 40$ הם $0.0170, 0.00616, 0.00222, 0.00080$. השגיאה לא יורדת על ידי גורם של 4 כאשר מגדילים n בגורם של 2. השגיאה יורדת על ידי גורם של בערך $2^{3/2} \approx 2.8$. הסיבה לכך היא ש-$\sqrt{x}$ איננה גזירה בראשית.