בס"ד

שיטות נומריות, 376-88
מבחן לדוגמה, סמסטר א' תשס"ג

ד"ר יעקוב קרסנוב
פרופ' ג'רמי שיף

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, כל שאלה שווה 20 נקודות.
יש לנמק היטב כל תשובה!

1. אם $f(x)$ גזירה פעמיים אזי

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

לכן ניתן לעשות קירוב ל-$f''(x)$ על ידי הנוסחה בצד ימין למעלה, אם $h$ מספר ממשי קטן.

א. אם מפעילים קיורב זה במקרה $f(x) = x^4$ מה תהיה השגיאה (כפונקציה של $h$) ?

ב. אם מפעילים קיורב זה במקרה $f(x) = x^4$ על מחשב שנותן שגיאות יחסיות לא יותר מ-$\epsilon$, מה תהיה שגיאת העיגול הכי גדול שאפשר ?

ג. כאשר ב-Matlab או Scilab כותבים

```
x = 1;
h = 10.^[-8 : -1];
( (x+h).^4 - 2*x^4 + (x-h).^4 ) ./ h.^2
```

מקבלים תשובה

```
7.7716  12.0348  11.9996  12.0000  12.0000  12.0000  12.0002  12.0200
```

הסבר, לאור התוצאות שלך מסעיפים א. ו-ב.

2. א. הוכח שלרקורסיה

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{96} x_n^2 \left(41x_n + 13x_n^2 - 73 - 5x_n^3\right)$$

יש נקודות שבת כאשר $x_n = -1, 0, 3$.

ב. האם יש התכנסות לנקודות שבת אלה ? אם יש, האם ההתכנסות היא ליניארית, ריבועית או מה ?

ג. האם יש נקודת שבת בין $-3$ ובין $-2$ ?

3. א. איך מוצאים ערכים ווקטורים עצמיים של מטריצה ריבועית ב-Matlab או Scilab ?
ב. אם

$$A = \begin{pmatrix} 1.03 & 2.96 & -2.18 & 3.35 \\ -3.4 & -7.78 & 0.173 & -2.56 \\ 7.79 & 7.77 & 5.16 & 3.03 \\ 2.13 & 0.137 & 1.23 & 1.98 \end{pmatrix}$$

ו-

$$b_0 = \begin{pmatrix} 0.666 \\ 0.200 \\ 0.387 \\ 0.821 \end{pmatrix} \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0.672 \\ 0.202 \\ 0.391 \\ 0.830 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0.676 \\ 0.209 \\ 0.394 \\ 0.835 \end{pmatrix}$$

אזי ל-3 ספרות דיוק

$$A\backslash b_0 = \begin{pmatrix} -3.44 \\ 0.761 \\ 2.74 \\ 2.37 \end{pmatrix} \qquad A\backslash b_1 = \begin{pmatrix} -3.33 \\ 0.729 \\ 2.65 \\ 2.30 \end{pmatrix} \qquad A\backslash b_2 = \begin{pmatrix} -6.80 \\ 1.65 \\ 5.34 \\ 4.31 \end{pmatrix}$$

מה ניתן להגיד על מספר המצב של $A$ מתוצאות אלה ?

4. א. הסבר, בקצרה, את המושג cubic spline.
ב. האם הפונקציה

$$s(x) = \begin{cases} 1 - x + x^2 - x^3 & -1 \le x \le 0 \\ 1 - x + x^2 + 3x^3 & 0 \le x \le 1 \\ 2x - 2x^2 + 4x^3 & 1 \le x \le 2 \\ 24 - 34x + 16x^2 + x^3 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

מגדירה cubic spline בקטע $-1 \le x \le 3$ ?
אם כן, האם זה cubic spline טבעי (natural) ?
ג. מצא מספרים $\alpha, \beta$ כך שאם מוסיפים $\alpha x^3$ ל- $s(x)$ בקטע $-1 \le x \le 0$ ו-$\beta(x-2)^3$ ל-$s(x)$ בקטע $2 \le x \le 3$, ה-spline נעשה טבעי. מה הם הערכים (אחרי התיקון) של $s(-1), s(0), s(1), s(2), s(3)$ ?

5. א. מצא $a$ כך שהפולינום הליניארי $p_1(x) = x + a$ הוא אורתוגונלי ל- $p_0(x) = 1$ על הקטע $[1, 2]$ ביחס לפונקציית המשקל $w(x) = x$.

ב. מצא את הפולינום $p(x)$ מדרגה לא יותר מ-1 שהוא הקירוב הכי טוב ל- $f(x) = x^2$ בקטע $[1, 2]$, במובן ש-

$$\int_1^2 x \left(f(x) - p(x)\right)^2 dx$$

הוא מינימלי.

ג. צייר גרף של $f(x)$ ו-$p(x)$ מסעיף ב. על הקטע $[1, 2]$. האם התשובה שלך נראה סבירה ?

6. א. מה הוא כלל סמפסון? איך בדרך כלל מתנהגת הטעות בכלל סמפסון כאשר מגדילים את $n$, מספר הקטעים ?

ב. חשב קירוב ל-

$$\int_0^1 x^{3/2} dx$$

על ידי כלל סמפסון עם $n = 4$.

ג. כאשר משתמשים בכלל סמפסון עם $n = 8, 16, 32$ לחשב את האנטגרל בסעיף ב. מקבלים את התוצאות $0.40007725, 0.40001371, 0.40000243$ בהתאם. האם הטעות מתנהגת כמו שכתבת בסעיף א.? הסבר.

בהצלחה!!