בס"ד

<u>שיטות נומריות, 88-376, ד"ר קרסנוב ופרופסור שיף</u>

<u>מבחן מועד ג', סמסטר א' תשס"ג</u>

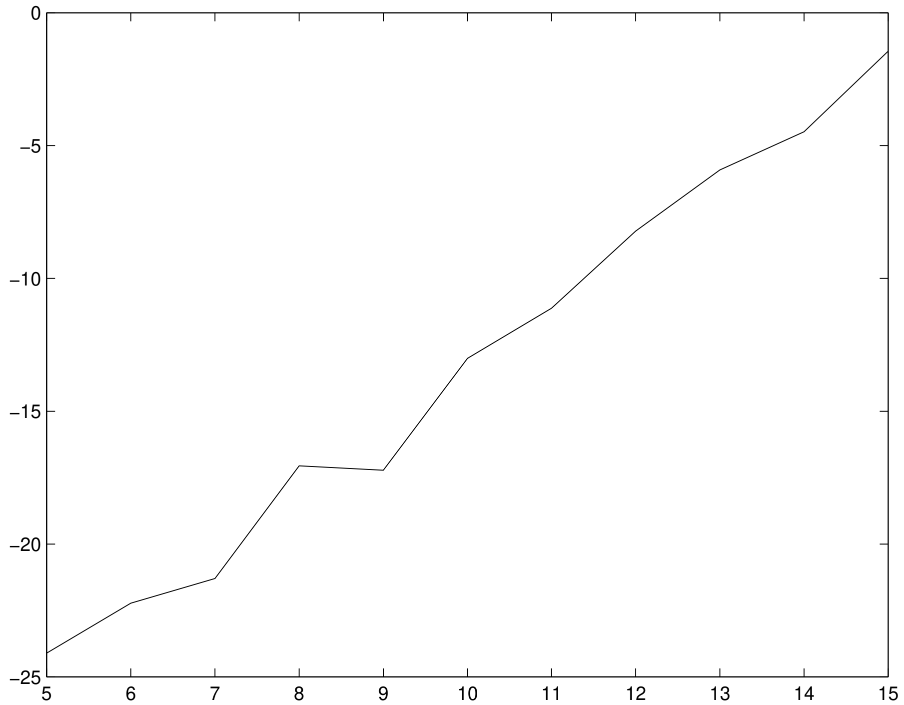
זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, כל שאלה שווה 20 נקודות.
יש לנמק היטב כל תשובה!

.1

(א) כאשר כותבים ב- Matlab את הפקודות

```
n=5:15;
m=sin(10.^n*pi);
plot(n,log(abs(m)))
```

מקבלים את הגרף



הסבר את הפקודות, ואת הצורה של גרף (ובמיוחד למה לא מקבלים שכל רכיב של m שווה 0).

(ב) מה עדיף לחשב מבחינה נומרית $\sin x - \sin y$ או $2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$? עבור איזה בחירות של x, y ייתכן ששתי פעולות אלה יחזירו תשובות מאוד שונות ? יש לקחת בחשבון את התוצאות של סעיף (א).

2. לשלוש הרקורסיות הבאות יש נקודת שבת כאשר $x_n = 0$.

(א) $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{3}x_n^3$

(ב) $x_{n+1} = x_n - \tan x_n$

(ג) $x_{n+1} = x_n - x_n^{1/3}$

אם מתחילים את הרקורסיות קרוב לנקודת השבת, לאיזה מהם תהיה התכנסות ולאיזה מהם לא? מה הוא סדר ההתכנסות (לרקורסיות הרלוונטיות)? לרקורסיה (א) הוכח שאם $\sqrt{6} < |x_n|$ אזי $|x_{n+1}| < |x_n|$ ולכן יש התכנסות. מהו האנלוג של תוצאה זו לרקורסיה (ב)? יש לכלול בתשובה שלך חישוב של קירוב לשורש הרלוונטי של $2x_0 = \tan x_0$.

3.

(א) מהו פירוק LU של מטריצה ריבועית A, ואיך משתמשים בפירוק זה לפתרון המשוואה $Ax = b$ באופן כללי?

(ב) מצא פירוק LU של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

רמז:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

יש לנסות לבנות את L ואת U על ידי תוספת שורה אחת ועמודה אחת למטריצות בצד ימין. אין צורך ב- pivoting.

(ג) באופן כללי, אם יודעים פירוק LU של המטריצה A' מגודל $n \times n$, איך ניתן להשתמש בזה כדי למצוא את הפירוק של מטריצה חדשה A מגודל $(n+1) \times (n+1)$, שמקבלים על ידי תוספת שורה אחת ועמודה אחת ל- A' ? (בצורה סכמטית:

$$A_{(n+1)\times(n+1)} = \left(\begin{array}{c|c} A'_{n\times n} & \mathbf{a}_{n\times 1} \\ \hline \mathbf{b}_{1\times n} & c_{1\times 1} \end{array} \right)$$

כאשר $\mathbf{a}$ הוא וקטור עמוד ממימד n, $\mathbf{b}$ הוא וקטור שורה ממימד n, ו-c הוא מספר).

.4

(א) הסבר, בקצרה, מהו cubic spline ואיך מוצאים cubic spline ב- Matlab

(ב) מצא את הפונקציה $s_2(t)$ כך ש-

$$s(t) = \begin{cases} 1+\alpha(t+1)^3 & -1 \le t \le 0 \\ s_2(t) & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

היא natural cubic spline בקטע $[-1,1]$. (הכוונה של natural: $s''(t) = 0$ בקצוות הקטע. כאן α מספר ממשי כל שהוא.)

(ג) בסעיף ב', איך ניתן לבחור α כך ש- $s(-1) = s(1)$?

.5 מצא פולינום $p(x)$, מדרגה 3 או פחות, שהוא הקירוב הכי טוב לפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} -x^4 & -1 \le x \le 0 \\ x^4 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

על הקטע $[-1,1]$, במובן של ריבועים מזעריים, כלומר ש-

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - p(x))^2 \, dx$$

הוא מינימלי. הערה: שים לב שהפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. בדוק את התשובה שקבלת על ידי השוואה של הגרפים של $f(x)$ ו- $p(x)$.

אם רוצים לבנות קירוב אחר $q(x)$ ל- $f(x)$ כך ש- $q(x)$ הוא פולינום מדרגה 3 או פחות, אי-זוגי, המקיים $q(\pm1) = \pm1$, אזי בהכרח $q(x)$ צריך להיות מהצורה

$$q(x) = \alpha x + (1-\alpha)x^3$$

איך היית מציע לבחור את המקדם α ?

.6

(א) מצא α, β, γ כך שנוסחת הקירוב

$$\int_0^h f(x)dx \approx \alpha f(0) + \beta f\left(\frac{h}{3}\right) + \gamma f(h)$$

היא מדוייקת כאשר $f(x)$ הוא פולינום מדרגה עד 2.

(ב) מהו נוסחת הקירוב הכי פשוטה ל- $\int_0^h f(x)dx$ שמקבלים מכלל סמפסון? (הכוונה של "הכי פשוט" - מספר מינימלי של חישובים של f.)

(ג) איזה משתי נוסחאות הקירוב -- זו של סעיף א' או זו של סעיף ב' -- נותנת קירוב יותר טוב ל- $\int_0^h x^3 dx$? ואיזה נותנת קירוב יותר טוב ל- $\int_0^h \sqrt{x} dx$?

בהצלחה!!