בס"ד

שיטות נומריות, 88-376 ד"ר ג'רמי שיף

תרגילים: אנטגרציה נומרית

1. מצא קירובים לאנטגרל

$$\int_0^{2\pi} \cos(\sin\theta)d\theta$$

א. על ידי ה- trapezium rule עם 64 צעדים.
ב. על ידי Simpson's rule עם 64 צעדים.
ג. על ידי שיטת Romberg מבוסס על ה- trapezium rule עם 4,8,16,32,64 צעדים.

מצא גם קירובים לאנטגרל

$$\int_0^{2\pi} \sin(\cos\theta)d\theta$$

על ידי ה- trapezium rule עם 4,8,16 צעדים. הסבר למה הקירובים האלה כל כך מדויקים.

2. א. הוכח שנוסחת הקירוב

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(f(a) + 4f(a+\tfrac{1}{2}h) + f(b)\right) \ , \qquad h = b-a$$

היא מדוייקת כאשר $f(x)$ הוא פולינום מדרגה לא יותר מ-3.
(זו נוסחת הקירוב שעליה מבוסס Simpson's rule.)

ב. מצא מקדמים c_1, c_2, c_3 כך שנוסחת הקירוב

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(c_1 f(a) + c_2 f(a+\tfrac{1}{4}h) + c_3 f(a+\tfrac{1}{2}h) + c_2 f(a+\tfrac{3}{4}h) + c_1 f(b)\right)$$

היא מדוייקת כאשר $f(x)$ הוא פולינום מדרגה לא יותר מ-5.

3. מצא קירובים לאנטגרל

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}dt}{1+7\cos^2 t}$$

על ידי:

א. ה- trapezium rule עם 2 צעדים
ב. ה- trapezium rule עם 2 צעדים בקטע $[0, \frac{\pi}{4}]$ וצעד אחד בקטע $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.
ג. ה- trapezium rule עם צעד אחד בקטע $[0, \frac{\pi}{4}]$ ושני צעדים בקטע $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.
ד. ה- trapezium rule עם 4 צעדים

התשובה המדוייקת לאנטגרל היא $\frac{\pi}{4} \approx 0.785398$. למה לדעתך הקירוב בסעיף ג יותר מוצלח מהקירוב בסעיף ב ?

4. השתמש ב-Gaussian Quadrature עם $4, 6, 8$ ו-10 קודקודים למצוא קירובים לאנטגרל

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$$

(ניתן למצוא את הקודקודים והמשקלות הרלוונטיים באתר הקורס.)

5. א. מצא (נומרי) את ארבעת השורשים x_1, x_2, x_3, x_4 של הפולינום $L_4(x)$, הפולינום של Laguerre מדרגה 4.
ב. מצא משקלות w_1, w_2, w_3, w_4 כך שנוסחת הקירוב

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{4} w_i f(x_i)$$

הוא מדוייק כאשר $f(x)$ הוא פולינום מדרגה לא יותר מ-3.
(נוסחת עזר: $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!$)
ג. בדוק שנוסחת הקירוב גם מדויק כאשר $f(x)$ הוא x^4, x^5, x^6 או x^7 (או צירוף ליניארי מהם).
ד. השתמש בנוסחת הקירוב למצוא קירוב לאנטגרל

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin x \, dx$$

(תשובה מדוייקת: $\frac{1}{2}$).