בס"ד

שיטות נומריות, 88-376 ד"ר ג'רמי שיף

מבחן מועד א', סמסטר א' תש"ס

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על כל 3 השאלות בחלק א' ועל 3 מתוך 4 השאלות בחלק ב'.
ניקוד השאלות: בחלק א' 8 נקודות לכל שאלה, בחלק ב' 17 נקודות לכל שאלה
(סה"כ הניקוד: $76 = $ (בונוס אוטומטי) $3 \times 8 + 3 \times 17 + 1$).
יש לנמק היטב כל תשובה!

חלק א'

1. מצא פולינום $p(x)$ מדרגה לא יותר מ-2 כך ש $p(0) = 0.2$, $p(1) = 1.3$, $p(3) = 0.4$. (אין צורך לכתוב את התשובה דווקא בצורה הסטנדרטית $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$). מצא את המקסימום של $p(x)$.

2. מצא פולינומים מדרגות $0, 1, 2$ שהם אורתוגונליים בקטע $[-1, 1]$ ביחס לפונקציית המשקל $w(x) = 1 - x^2$.

3. חשב את האינטגרל

$$\int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{1}{4+x^2}\right) dx$$

על ידי Gaussian quadrature עם $n = 3$.

חלק ב'

4. א. אם x^* שורש של המשוואה $f(x) = 0$, אזי לנוסחת הנסיגה $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$ יש נקודת שבת כאשר $x_n = x^*$. מצא תנאי מספיק לכך שאם מתחילים את הרקורסיה מספיק קרוב ל-x^* אזי היא תתכנס. במקרה ש- $f(x) = x^4 - x - 1$ (לפולינום זה יש שני שורשים ממשיים, אחד כאשר $x \approx 1.2$, השני כאשר $x \approx -0.7$), בדוק האם התנאי הרלבנטי מתקיים בכל אחד משני שורשי המשוואה.

   ב. אם x^* שורש של המשוואה $f(x) = 0$, אזי לנוסחת הנסיגה $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+f(x_n)}$ יש נקודת שבת כאשר $x_n = x^*$. מצא תנאי מספיק לכך שאם מתחילים את הרקורסיה מספיק קרוב ל-x^* אזי היא תתכנס. במקרה ש- $f(x) = x^4 - x - 1$, בדוק האם התנאי הרלבנטי מתקיים בכל אחד משני שורשי המשוואה.

5. עבור איזה ערכים של הפרמטר a ניתן למצוא, בלי pivoting, פירוק LU של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad ?$$

אם $a = -0.67$, מצא פתרון (עד לדיוק של 2 ספרות) של המערכת $Ax = b$ כאשר

$$b = \begin{pmatrix} -0.23 \\ 2.41 \\ 0.00 \\ 1.10 \end{pmatrix}$$

6. א. מצא את הישר $y = ax + b$ שהוא הקירוב הטוב ביותר (במובן של ריבועים מזעריים) לנתונים

x_n	0	1	2
y_n	2.3	1.4	0.7

ב. מצא את הישר $y = ax + b$ שהוא הקירוב הטוב ביותר (במובן של ריבועים מזעריים) לנתונים

x_n	0	1	2	3
y_n	2.3	1.4	0.7	α

כאשר α הוא קבוע.

ג. עבור איזה α שני הישרים שחשבת בסעיפים א ו-ב הם זהים? נמק.

7. מצא את הישר $p(x) = ax + b$ שהוא הקירוב הטוב ביותר ל-

$$f(x) = \frac{e^{x/2}}{x+3}$$

בקטע $[-1, 1]$, במובן ש

$$S = \int_{-1}^{1} (p(x) - f(x))^2 \, dx$$

הוא מינימלי. יש לחשב את האנטגרלים הרלבנטיים על ידי כלל הטרפז עם 4 צעדים.

בהצלחה!!