בס"ד

שיטות נומריות, 376-88 — ד"ר ג'רמי שיף

מבחן לדוגמה

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על כל 3 השאלות בחלק א' ועל 3 מתוך 4 השאלות בחלק ב'.
ניקוד השאלות: בחלק א' 8 נקודות לכל שאלה, בחלק ב' 17 נקודות לכל שאלה
(סה"כ הניקוד: $76 = (\text{בונוס אוטומטי}) 1 + 17 \times 3 + 8 \times 3$).
יש לנמק היטב כל תשובה!

חלק א'

1. מצא פולינום $p(x)$ מדרגה לא יותר מ-3 כך ש $p(0) = 1.2$, $p(1) = 3.1$, $p(2) = 1.1$, $p(4) = 1.4$.
(אין צורך לכתוב את התשובה דווקא בצורה הסטנדרטית $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.)
חשב את $p(3)$.

2. מצא את הישר $p(x) = ax + b$ שהוא הקירוב הטוב ביותר לפונקציה $f(x) = 1/(2+x)$ על הקטע $[-1, 1]$, במובן ש
$$\int_{-1}^{1} (p(x) - f(x))^2 \, dx$$
הוא מינימלי.

3. חשב את האנטגרל
$$\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} dx$$
על ידי Gaussian quadrature עם $n = 3$. רמז: כתוב את האנטגרל כאנטגרל על הקטע $[-1, 1]$ על ידי ההצבה $y = (4x/\pi) - 1$.

חלק ב'

4. מה היא שיטת ניוטון לפתרון המשוואה $x^3 - 3x = 0$? עבור איזה ערכים התחלתיים השיטה מתכנסת, ולאיזה מן השורשים? (יש (א) לדווח על תוצאות נומריות עבור לפחות 6 בחירות של ערך התחלתי, ו-(ב) לתת הסברים לתוצאות במקרים אלה, ונימוקים תאורטיים למה שקורה עבור ערך התחלתי כללי.)

5. פתור את מערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} 28 & 35 & -20 \\ -35 & -15 & 7 \\ 20 & 55 & -33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$$

(a קבוע נתון). עבור איזה a מקבלים $y = 0$ בפתרון? אם מוסיפים $\frac{1}{10}$ לערך זה של a , איך ישתנה הפתרון? האם המערכת היא well-conditioned או ill-conditioned ? נמק.

6. נתונים שלוש נקודות $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ עם $x_0 < x_1 < x_2$ ו-$y_0 < y_1 < y_2$. איזה בין שלושת הפונקציות האלה היא בהכרח פונקציה עולה?
   א. פולינום הבין העוברת דרך 3 הנקודות.
   ב. ה- spline הליניארי המחברת את 3 הנקודות.
   ג. ה- cubic spline הטבעי המחברת את 3 הנקודות.
   נמק את תשובתך!

7. מצא 3 קירובים לאנטגרל

$$\int_0^1 \sin(e^{x/3})\, dx$$

על ידי כלל טרפז עם $4, 6, 8$ צעדים. בכמה צעדים היית צריך להשתמש, לדעתך, כדי לקבל קירוב שהטעות בו לא עולה על 10^{-6} ? נמק את תשובתך!

בהצלחה!!

נספח: עוד כמה שאלות מתאימות לחלק א'

1. מצא את הישר $y = ax + b$ שהוא הקירוב הטוב ביותר (במובן של ריבועים מזעריים) לנתונים הבאים:

x_n	0	1	2	4
y_n	1.3	1.4	1.6	1.9

2. מצא פולינומים מדרגות $0, 1, 2$ שהם אורתוגונליים על הקטע $[-1, 1]$ ביחס לפונקציית המשקל $w(x) = 1 - |x|$.
3. מצא קירוב לאנטגרל

$$\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} dx$$

על ידי ה-trapezium rule עם (א) 3 ו-(ב) 6 צעדים. איך ניתן לצרף את שתי התוצאות האלה לקבלת תוצאה טובה יותר?