שיטות נומריות 2

תרגיל 1. שיטות למד"ר: יישום שיטות ראשונות, סדר של שיטה

1. (א) הפתרון המדויק של הבעייה הסקלרית

$$x' = x \ , \qquad x(0) = 1$$

הוא כמובן

$$x(t) = e^t$$

השתמש ב-6 השיטות Euler, Backward Euler, Improved Euler, Midpoint, Trapezoid, Runge-Kutta כדי למצוא קירוב לפתרון כאשר $t = 1$ ($x(1)$). לכל שיטה יש להשתמש ב-$h = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$, ולבדוק את התלות של הטעות על h. (הערה: באתר הקורס יש עזרה ביישום השיטות הסתומות Backward Euler ו-Trapezoid).

(ב) הוכח שכאשר פותרים את הבעייה בסעיף א. על ידי שיטת אויילר מקבלים

$$x_i = (1 + h)^i$$

הוכח מזה שהקירוב שמקבלים ל-$x(1)$ אכן שואף ל-e כאשר $h \to 0$. האם אתה יכול לתת הוכחה דומה לשאר השיטות ?

(ג) חזור על סעיף א. עבור הבעייה

$$y'' + 2y = \cos t \ , \quad y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 0$$

שהפתרון המדוייק שלו הוא $y(t) = \cos t$.

2. הפונקציה $y(t)$ פותרת את הבעייה

$$y'' = -ty + \cos t \ , \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

נדרש למצוא את $y(2\pi)$ לדיוק של חלק 1 בתוך 10^{10}. מצא קירובים ל-$y(2\pi)$ על ידי שיטת Runge-Kutta הקלסי עם 20, 40 ו-80 צעדים. מתוך התוצאות שלך מצא אומדן למספר הצעדים N שהיית צריך להשתמש כדי לקבל את הדיוק הרצוי. בדוק את ההשערה שלך על ידי חישוב התוצאות משיטת Runge-Kutta עם N ו-$2N$ צעדים. חזור על התהליך אבל עם שיטת ה-midpoint. איזה שיטה יותר יעילה?

3. מצא (נומרית) פתרונות של משוואות Lorenz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} p(x_2 - x_1) \\ rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - qx_3 \end{pmatrix}$$

כאשר p, q, r הם קבועים. יש לבדוק את המקרים

(א) $p = 10, q = 8/3, r = 28$

(ב) $p = 10, q = 3, r = 18$

(ג) $p = 10, q = 8, r = 18$

לכל מקרה יש לבחור מספר של תנאי התחלה x_0. יש להעזר ב-Matlab לצייר את הפתרונות $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ כעקומות במרחב.

4. כאשר יורים כדור עם מהירות 200 מטר לשנייה בזווית θ מעל הקרקע, הגובה $z(t)$ של הכדור והמרחק $r(t)$ ממקורו מקיימים את המשוואות

$$r'' = -0.001 r' \sqrt{r'^2 + z'^2} \qquad z'' = -0.001 z' \sqrt{r'^2 + z'^2} - 9.8$$

$$r(0) = 0 \ , \quad z(0) = 0 \ , \quad r'(0) = 200\cos\theta \ , \quad z'(0) = 200 \sin\theta$$

כתוב תוכנה למצוא את הטווח של הכדור כפונקציה של θ (הטווח הוא הערך של $r(t)$ כאשר $z(t)$ חוזר ל-0 לפעם הראשונה). לאיזה θ, בערך, מקבלים טווח מקסימלי ?

5. בשיעור אמרנו שניתן לכתוב את המערכת הלא-אוטונומית $X' = F(t,X)$ (X ממימד $d-1$) כמערכת אוטונומית $x' = f(x)$ על ידי שכותבים

$$x = \begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix} \ , \qquad f(x) = \begin{pmatrix} F\left(x_d, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{d-1} \end{pmatrix}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

הראה ששיטת Runge-Kutta הקלסי למערכת $x' = f(x)$ שקולה לשיטה הבאה למערכת $X' = F(t,X)$:

$$\begin{aligned} K_1 &= hF(t_i, X_i) \\ K_2 &= hF\left(t_i + \frac{1}{2}h, X_i + \frac{1}{2}K_1\right) \\ K_3 &= hF\left(t_i + \frac{1}{2}h, X_i + \frac{1}{2}K_2\right) \\ K_2 &= hF\left(t_i + h, X_i + K_3\right) \\ X_{i+1} &= X_i + \frac{1}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) \end{aligned}$$

(זה הצורה שבה כותבים את השיטה ברוב הספרים.)

6. מצא את סדר השיטה

$$x_{i+1} = x_i + h\left(\alpha_1 f(x_i) + \alpha_2 f\left(x_i + \frac{1}{2}hf(x_i)\right) + \alpha_3 f(x_{i+1})\right)$$

לפתרון מערכת המשוואות $x' = f(x)$, כאשר $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ הם קבועים עם $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.
האם ניתן לבחור $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך שהסדר יהיה גבוה מ-2 ?

איזה שיטה מקבלים כאשר בוחרים

(א) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$?

(ב) $\alpha_3 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$?

(ג) $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$?

(ד) $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$?

מה היא הסדר של כל אחת משיטות אלה ?

7. (א) מצא תנאים על המקדמים $a_{21}, a_{31}, a_{32}, w_1, w_2, w_3$ כך שהשיטה

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_i) \\
k_2 &= hf\left(x_i + a_{21}k_1\right) \\
k_3 &= hf\left(x_i + a_{31}k_1 + a_{32}k_2\right) \\
x_{i+1} &= x_i + w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3
\end{aligned}
$$

יהיה מסדר מעל 2. (שיטה כזו נקראת three stage Runge-Kutta.)

(ב) מצא תנאים על המקדמים $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, w_1, w_2$ כך שהשיה

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(x_i + a_{11}k_1 + a_{12}k_2\right) \\
k_2 &= hf\left(x_i + a_{21}k_1 + a_{22}k_2\right) \\
x_{i+1} &= x_i + w_1k_1 + w_2k_2
\end{aligned}
$$

יהיה מסדר מעל 2. (שיטה כזו נקראת implicit two stage Runge-Kutta.) האם ניתן לקבל סדר מעל 2 עם $a_{12} = a_{21}$, $a_{11} = a_{22}$, ו- $w_1 = w_2$? האם ניתן לקבל סדר מעל 2 עם $a_{11} = a_{22} = 0$, ו-$w_1 = w_2$?