1. למערכות הבאות מצא את גודל הצעד (h) הכי גדול שניתן להשתמש (א) בשיטת אויילר ו-(ב) בשיטת Runge-Kutta בלי בעייה של אי-יציבות:

$$x' = \begin{pmatrix} -500 & 499 \\ 500 & -501 \end{pmatrix} x$$

$$x' = \begin{pmatrix} -500 & 499 \\ -500 & -501 \end{pmatrix} x$$

$$x' = \begin{pmatrix} 400 & 499 \\ -500 & -401 \end{pmatrix} x$$

$$x' = N^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix} x \qquad (N \times N \text{ גודל המטריצה})$$

בכל המקרים יש למצוא הערכה תאורטית ל-h הכי גדול האפשרי, ולבדוק במחשב שאם לוקחים h יותר גדול מזה יש אכן בעייה של אי-יציבות, ואם לוקחים h יותר קטן אין בעייה. יש גם לבדוק שבשיטות Backward Euler ו-Trapezoid אין הגבלות כאלה. במערכת האחרונה, יש לקחת את מימד המערכת להיות 10 ו-50.

2. לשתי משוואות הבאות

$$x' = -19tx \ , \qquad x(0) = 1$$

$$x'' = -199tx \qquad x(0) = 1 \ , \quad x'(0) = 0$$

בדוק במחשב עד איזה t ניתן לבצע אינטגרציה עם שיטת Runge-Kutta עם $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}$, עד שיש בעייה של אי-יציבות. האם השימוש בשיטת Trapezoid פותר את הבעיות?

3. הזרם $I(t)$ במעגל חשמלי מקיים את המשוואה

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E(t)$$

כאשר $L = 0.032$, $R = 2 \times 10^5$, $C = 4 \times 10^{-4}$, ו- $E(t) = 10\text{sgn}(\cos t)$. ($\text{sgn}(x)$ שווה $+1$ אם $x > 0$, -1 אם $x < 0$, ו-0 אם $x = 0$.) השווה את היעילות של שיטת Runge-Kutta נגד שיטת ה-Trapezoid בפתרון בעייה זו.

4. (א) מצא את תחום היציבות של השיטות improved Euler ו-midpoint.

(ב) מצא את תחום היציבות של השיטה

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i) \\ k_2 &= hf\left(x_i + a_{21}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_i + a_{31}k_1 + a_{32}k_2\right) \\ x_{i+1} &= x_i + w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 \end{aligned}$$

כאשר המקדמים $a_{21}, a_{31}, a_{32}, w_1, w_2, w_3$ מקיימים את התנאים

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 1 \\ w_2a_{21} + w_3(a_{31} + a_{32}) &= \frac{1}{2} \\ w_2a_{21}^2 + w_3(a_{31} + a_{32})^2 &= \frac{1}{3} \\ w_3a_{32}a_{21} &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(ג) מצא את תחום היציבות של השיטה

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + k \\ k &= hf\left(x_i + \frac{1}{2}k\right) \end{aligned} \qquad \text{כשאר}$$

(ד) (יותר קשה) האם כל שיטה סתומה תמיד יציבה ? מספיק להסתכל על משפחת השיטות שהופיעו בשאלה 7 בתרגיל 1.

5. כתוב פונקציה ב-Matlab ליישם את האלגוריתם שלמדנו בכיתה לשליטה בגודל הצעד בשיטת Runge-Kutta. העזר בה לפתור את הבעייה

$$\begin{aligned} x'' &= -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ y'' &= -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$x(0) = 1 - e \qquad y(0) = 0$$

$$x'(0) = 0 \qquad y'(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

כאן e הוא פרמטר בין 0 ל-1. לפי התאוריה:

(א) הפתרון, כמסלול במישור x, y הוא מסלול סגור (אליפסה).

(ב) ה"אנרגיה" $E = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - (x^2+y^2)^{-1/2}$ לא משתנה בזמן.

(ג) ה"תנע הזוויתי" $L = xy' - yx'$ לא משתנה בזמן.

בדוק שכאשר עושים אנטגרצייה של המשוואות בעזרת שיטת Runge-Kutta עם שליטה על גודל הצעד, אכן רואים את כל התכונות האלה עד לדיוק המבוקש.

6. האם שליטה על גודל הצעד עוזרת לפתור את הבעייה של קשיחות? בדוק את יעילות הפונקציה שלך משאלה 5 בפתרון המערכות משאלה 1.