1. פתור את הבעיות הבאות על ידי שיטת יריה, על ידי שיטת הפרשים סופיים, ועל ידי שיטת collocation (כאשר מחפשים פתרון בצורה של פולינום):

$$-((1+t)y')' + \frac{y}{1+t} = \frac{1}{1+t} \ , \quad 0 < t < 1 \ , \qquad y(0) = y(1) = 0$$

$$y'' = e^y \ , \quad 0 < t < 1 \ , \qquad y(0) = y(1) = 0$$

$$y'' = 10y^3 + 3y + t^2 \ , \quad 0 < t < 1 \ , \qquad y(0) = 0 \ , \quad y(1) = 1$$

השווה בין השיטות!

2. השתמש בשיטת (א) יריה, (ב) הפרשים סופיים, (ג) collocation ו-(ד) גלרקין כדי למצוא 5 הערכים העצמיים הראשונים של הבעייה

$$(1-t^2)y'' - 2\alpha t y' + (\lambda + c(t))y = 0 \ , \qquad -1 < t < 1$$

סופי $y(1), y(-1)$

כאן $\alpha > 0$ הוא קבוע, ו-$c(t) \geq 0$ היא פונקצייה ידועה המוגדרת עבור $-1 \leq t \leq 1$. ניתן לבדוק את התוכנות שלך במקרים (א) $\alpha = 1$, $c(t) = 0$ (משוואת לז'נדר) ו-(ב) $\alpha = \frac{1}{2}$, $c(t) = 0$ (משוואת צ'ביצ'ף). אבל יש להפעיל גם עבור לפחות מקרה אחד עם $c(t) \neq 0$.

קצת עזרה:

א. לשיטת היריה, אולי יעזור לדעת את הצורה של הפתרון קרוב ל-$t = \pm 1$. ניתן לפתח את פתרון הבעייה לטור חזקות מסביב לנקודות אלה, ומקבלים:

$$y(t) = y(1)\left(1 + \frac{\lambda + c(1)}{2\alpha}(t-1) + \frac{2\alpha c'(1) + (\lambda + c(1))(\lambda + c(1) - 2\alpha)}{8\alpha(1+\alpha))}(t-1)^2 + O\left((t-1)^3\right)\right)$$

$$y(t) = y(-1)\left(1 - \frac{\lambda + c(-1)}{2\alpha}(t+1) + \frac{-2\alpha c'(-1) + (\lambda + c(-1))(\lambda + c(-1) - 2\alpha)}{8\alpha(1+\alpha)}(t+1)^2 + O\left((t+1)^3\right)\right)$$

ב. עבור שיטות collocation וגלרקין מומלץ להשתמש בפולינומי לז'נדר כפונקציות בסיס. ניתן לייצר את פולינומי לז'נדר על ידי יחס הנסיגה

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

עם תנאי התחלה $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$. יש לשים לב ש- $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$. עוד תכונות של פולינומי לז'נדר: המשוואה הדפרנציאלית:

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

יחס בין הפולינומים והנגזרת:

$$(1-x^2)P_n'(x) = n(P_{n-1}(x) - xP_n(x))$$

3. מומלץ מאוד לקרוא את חלק המתאים של המדריך למשתמש של Matlab

http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/math_anal/diffeq17.shtml

יש לשים לב שהפקודה bvp4c לפתרון בעיות שפה ב-Matlab 6 לא קיים ב-Matlab 5. עוד חומר על הפקודה bvp4c ניתן להשיג מ-

ftp://ftp.mathworks.com/pub/doc/papers/bvp