1. (א) לוקחים מדגם של הפונקציה $f(t)$ כל פרק זמן Δ על הקטע $[0,T]$ $(T=N\Delta)$, ועושים קירוב לטרנספורם הפוריה $F(\omega)$ של $f(t)$ על ידי טרנספורם הפוריה הדיסקרטי

$$F\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \approx F_s = \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{2\pi i r s/N} \ , \qquad s = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2}-1$$

כאשר

$$f_r = \Delta f(\Delta r) \ , \qquad r = 0, \ldots, N-1$$

הסבר למה זה אמור לתת קירוב טוב לטרנספורם הפוריה, לפחות בהנחה ש-$f(t)$ קרוב ל-0 מחוץ לקטע $[0,T]$, ו-Δ הוא מספיק קטן.

(ב) בצע את התהליך המתואר בסעיף (א) עבור הפונקצייה $f(t)=e^{-(t-4)^2}$ ועבור הבחירות $T=4,8,16,32$, ו-$\Delta=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}$. בכל מקרה יש לצייר את הגרף של הערכים של $|F_s|^2$ נגד $2\pi s/T$. (הערה: טרנספורם הפוריה $F(\omega)$ המדויק במקרה זה מקיים $|F(\omega)|^2=\pi e^{-\omega^2/2}$.)

(ג) עבור איזה בחירות של T,Δ בפועל מקבלים קירוב טוב לטרנספורם? האם יש מקרים מפתיעים?

(ד) עבור איזה ערכים של Δ ו-T ניתן לצפות שנקבל קירוב טוב לטרנספורם הפוריה של הפונקציה

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}\cos bt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(a,b קבועים חיוביים)?

2. לפונקציה $f(t)$ יודעים את 16 הערכים הבאים

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(t)$	0	0	0	0	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	0	0	0	0

רוצים לעשות ביון לקבל קירובים לערכים של $f(t)$ כל פרק זמן $\frac{1}{4}$ (כלומר, להוסיף את הערכים ב-$t=\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\ldots$). בצע את הפעולה הזאת ב-Matlab

(א) על ידי שימוש בפקודה spline, הבונה cubic spline

(ב) על ידי מציאת טרנספורם הפוריה הדיסקרטי (הפקודה fft), הוספת אפסים, וטרנספורם פוריה הופכי (הפקודה ifft).

השווה בין התוצאות משתי השיטות. איזה שיטה דורשת יותר זמן חישוב?

3. (א) בנה סדרה של נתונים $\{f_r\}$, $r=0,\ldots,2000$, על ידי דגימה של הפונקציה

$$f(t) = \frac{t^2}{1+(t/50)^8}\sin\left(\frac{t^2}{100}\right) \ , \qquad t \in [0,100]$$

כל פרק זמן $\Delta=0.05$. איך נראה הגרף של טרנספורם הפוריה הדסקרטי $\{F_s\}$ של הסדרה $\{f_r\}$? הסבר.

(ב) בדוק את ההשפעה של ה-low pass filter

$$g_r = \sum_{i=-25}^{25} \frac{\sin(0.05Si)}{\pi i} f_{r-i} \ , \qquad r = 25, \ldots, 1975$$

על הסדרה $\{f_r\}$, כאשר S הוא פרמטר. יש לבדוק את המקרים $S = 5, 7.5, 10$. בכל מקרה יש להשוות את הגרף של הסדרה $\{g_r\}$ עם זה של הסדרה $\{f_r\}$, ואת הגרף של טרנספורם הפוריה $\{G_s\}$ עם זה של $\{F_s\}$. כמו כן יש לצייר את ה-gain plot, כלומר הגרף של

$$\left| \frac{G_s}{F_s} \right|^2$$

(ג) חזור על סעיף (ב) עם התוספת של פונקציית חלון של Bartlett

$$g_r = \sum_{i=-25}^{25} \left(1 - \left(\frac{i}{25}\right)^2\right) \frac{\sin(0.05Si)}{\pi i} f_{r-i} \ , \qquad r = 25, \ldots, 1975$$

באיזה מובנים התוצאות יותר טובות מאלה של סעיף (ב) ?