בס"ד

<u>שיטות נומריות 2 88-377, פרופ' ג'. שיף</u>
<u>מועד א', סמסטר ב', תשס"ג</u>

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
יש לענות על כמה שאלות שאפשר. כל השאלות שוות במשקל

1. (א) העזר בצעד אחד של שיטת modified Euler עם $h = 1$ כדי למצוא קירוב ל-$x(1)$, כאשר הפונקציה $x(t)$ היא הפתרון לבעיה

$$x' = \frac{1}{3x^2 - 1}\ , \qquad x(0) = 1$$

(ב) העזר בשני צעדים של שיטת modified Euler עם $h = \frac{1}{2}$ כדי למצוא קירוב ל-$x(1)$, כאשר הפונקציה $x(t)$ היא הפתרון לבעיה

$$x' = \frac{1}{3x^2 - 1}\ , \qquad x(0) = 1$$

(ג) השווה את הפתרונות שקבלת בסעיפים (א) ו-(ב). על ידי שימוש בתלות הידועה של הטעות בשיטת modified Euler בגודל הצעד h, מצא קירוב יותר טוב ל-$x(1)$,

(ד) הפתרון המדויק לבעיה בסעיפים (א) ו-(ב) הוא ש-

$$x(t)^3 - x(t) = t$$

השתמש בזה לבדוק שהקירוב שמצאת בסעיף הוא אכן שיפור לאלה שבסעיפים (א) ו-(ב).

2. (א) מה הם תחומי היציבות עבור שיטת Euler ושיטת Runge-Kutta?

(ב) האם ניתן להשתמש בשיטת Euler לפתור את המערכת

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix} x$$

ואם כן, מה היא ההגבלה על גודל הצעד h? (כאן κ הוא קבוע חיובי).

(ג) האם ניתן להשתמש בשיטת Runge-Kutta לפתור את המערכת

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix} x$$

ואם כן, מה היא ההגבלה על גודל הצעד h? (כאן κ הוא קבוע חיובי).

(ד) הסבר איך היו משתמשים בשיטת ה-trapezoid לפתור את המערכת בסעיפים (ב) ו-(ג).
הערה:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1+2\alpha^2} \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & -\alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & -\alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

3. רוצים למצוא קירוב לפתרון בעיית השפה

$$x'' + tx = 0 \ , \qquad x(0) = x(1) = 0$$

(א) איך ניתן להשתמש בשיטת collocation למצוא קירוב לפתרון בצורה של פולינום מדרגה 4, כלומר

$$x(t) \approx a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$$

יש לכתוב את המשוואות שמהן ניתן למצוא את המקדמים $a_0, \ldots, a_4$, אבל אין צורך לפתור אותן.

(ב) איך ניתן, דרך שיטות הפרשים סופיים למצוא קירובים ראשונים ל-$x(\frac{1}{4}), x(\frac{1}{2}), x(\frac{3}{4})$. שוב, יש לכתוב את המשוואות, אין צורך לפתור אותם.

4. הסבר, בקצרה,

(א) את ה-conjugate gradient method לאיתור מינימום של פונקציה של הרבה משתנים (הפונקציה לא בהכרח ריבועי), ו-

(ב) את שיטת Gauss-Newton לריבועים מזעריים לא-לינאריים. יש להדגים את השיטה עם הבעייה של למצוא פרמטרים A, B, C כך שהפונקציה

$$y = A\sin(Bx + C)$$

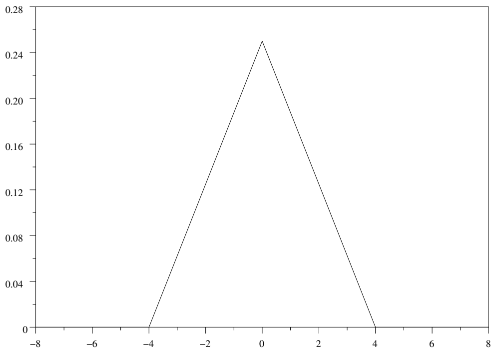
נותנת קירוב טוב לאוסף נתונים $\{(x_i, y_i)\}$.

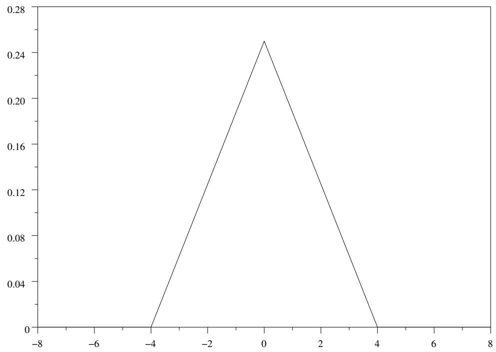
5. כדי למצוא קירוב לטרנספורם הפורייה של הפונקציה

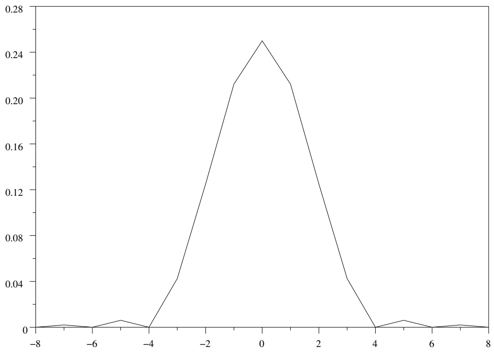
$$f(t) = \begin{cases} \sin^2 t & 0 \le t \le \pi \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

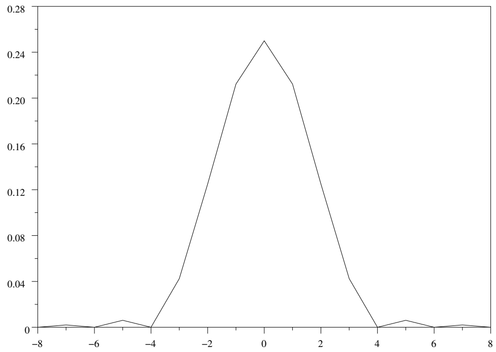
מחשבים את הערכים של $f(t)$ ב-2^N נקודות $0, \frac{T}{2^N}, \frac{2T}{2^N}, \ldots, \frac{(2^N-1)T}{2^N}$ (כולם בין 0 ל-T), ומחשבים את טרנספורם הפוריה הדסקרטי. בעמוד הבא מופיעים איורים של התוצאות כאשר $N = 5, 7$, $T = \pi, 2\pi, 4\pi$. ($N = 5$ בעמוד השמאלי, $N = 7$ בעמוד הימיני, $T = \pi, 2\pi, 4\pi$ מלמעלה למטה.) הסבר למה בדוגמה הזאת שינוי במספר הנקודות (שינוי של N ללא שינוי של T) אינו משפיע בכלל על צורת הטרנספורם, אבל שינוי בתחום הדגימה (שינוי של T ללא שינוי של N) עושה את הטרנספורם יותר חלק. באיזה נקודות הטרנספורם הוא מדוייק?

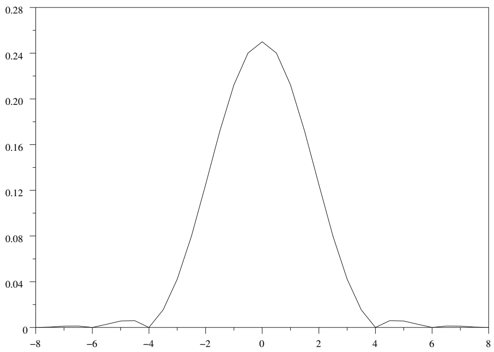
בהצלחה!!

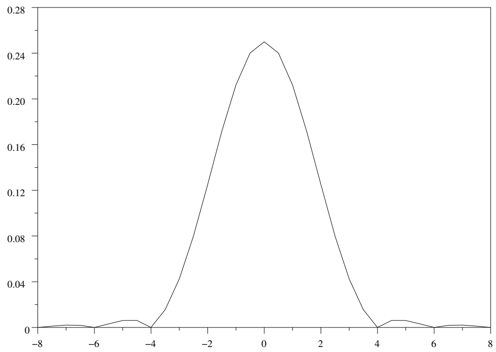

0.28
0.24
0.20
0.16
0.12
0.08
0.04
0
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8


0.28
0.24
0.20
0.16
0.12
0.08
0.04
0
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8


0.28
0.24
0.20
0.16
0.12
0.08
0.04
0
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8


0.28
0.24
0.20
0.16
0.12
0.08
0.04
0
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8


0.28
0.24
0.20
0.16
0.12
0.08
0.04
0
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8


0.28
0.24
0.20
0.16
0.12
0.08
0.04
0
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8