בס"ד

שיטות נומריות 2 88-377, פרופ' ג'. שיף

מועד ב', סמסטר ב', תשס"ג

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
יש לענות על כמה שאלות שאפשר. כל השאלות שוות במשקל.

1. (א) מה היא שיטת Runge-Kutta ומה הוא הסדר של שיטה זו?

(ב) כאשר משתמשים בשיטת Runge-Kutta לפתור את הבעייה

$$x' = x^2 + 2t \ , \qquad x(0) = -2$$

מקבלים

$$x(1) \approx 4.125286974 \times 10^{-2}$$

כאשר משתמשים ב-$h = \frac{1}{10}$, ו-

$$x(1) \approx 4.125833802 \times 10^{-2}$$

כאשר $h = \frac{1}{20}$. השתמש בתוצאות אלה לקבל קירוב כמה שאפשר יותר מדוייק ל-$x(1)$.

(ג) ל-10 ספרות דיוק $x(1) = 4.125873282 \times 10^{-2}$. מצא מקדמים a, b כך שהטעויות ב-Runge-Kutta מתנהגים כ-$ah^4 + bh^5$.

2. לשיטות

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n + \alpha h f(x_n)) + f(x_n + \beta h f(x_n))\right)$$

(α, β קבועים):

(א) מצא תנאי על α, β כך שהשיטה היא מסדר 2. האם יתכן שהשיטה מסדר 3?

(ב) כאשר התנאי בסעיף (א) מתקיים, מה הוא תחום היציבות של השיטה?

(ג) כאשר משתמשים בשיטות אלה עם בחירות שונות של α, β אשר מקיימים את התנאי מסעיף (א), מתברר שהרבה פעמים הטעות מינימלית כאשר $\alpha = \frac{1}{2}$. האם אתה יכול להסביר את זה?

3. (א) כתוב את שיטת אויילר עבור המערכת

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} x$$

מצא נוסחה ל-x_n במונחים של x_0. רמז:

$$\begin{pmatrix} 1 & h\omega \\ -h\omega & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}((1+ih\omega)^n + (1-ih\omega)^n) & -\frac{i}{2}((1+ih\omega)^n - (1-ih\omega)^n) \\ \frac{i}{2}((1+ih\omega)^n - (1-ih\omega)^n) & \frac{1}{2}((1+ih\omega)^n + (1-ih\omega)^n) \end{pmatrix}$$

(ב) רוצים למצוא פתרון לא טריביאלי לבעית השפה

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} x \ , \qquad x_1(0) = x_1(\pi) = 0$$

עבור איזה ערכים של ω קיים פתרון לא טריביאלי למערכת זו? אם פותרים את המערכת עם N צעידם של שיטת אויילר, עבור איזה ערכים של ω מוצאים פתרון לא טריביאלי? מה הקשר בין התשובה המדוייקת והתוצאות של שיטת אויילר?

4. הסבר איך ניתן להשתמש ב-FFT (פוריה טרנספורם מהיר) למטרות ביון (אינטרפולציה) בין אוסף נקודות. מה הן ההגבלות על השיטה ?

5. לפונקציה

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{4}\sin(x+y)$$

יש מינימום קורב ל-$(0,0)$.

(א) הסבר את שיטת הירידות הטלולות (the steepest descent method) למציאת המינימום.

(ב) בצע, במפורש, את הסיבוב הראשון של השיטה. כאשר יש צורך למצוא מינימום של פונקציה של משתנה אחד, יש לעשות כן עם שיטת ניוטון.

(ג) בצע, במפורש, את הסיבוב השני של השיטה (החל מהנקודה שהגעת אליו בסעיף (ב)). כאשר יש צורך למצוא מינימום של פונקציה של משתנה אחד, יש לעשות כן עם חיפוש יחס הזהב (עם לפחות 3 סיבובים של שיטה זו).

בהצלחה!!