בס"ד

שיטות נומריות 2 88-377, פרופ' ג'. שיף

מועד א', סמסטר ב', תשס"ד

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
יש לענות על כמה שאלות שאפשר. כל השאלות שוות במשקל

1. (א) רוצים למצוא נומרית את $y(1)$ כאשר $y(t)$ פותר את הבעייה

$$y' = \frac{1}{2}y \ , \qquad y(0) = 1$$

(פתרון מדויק $y(t) = e^{t/2}$). איזה קירוב לתשובה מקבלים על ידי שיטת אויילר עם $h = \frac{1}{4}$, ואיזה על ידי שיטת רונגה קוטה עם $h = 1$? באיזה h היה צריך להשתמש בשיטת אויילר כדי לקבל את הדיוק של שיטת רונגה קוטה עם $h = 1$?

(ב) רוצים למצוא נומרית את $y(1)$ כאשר $y(t)$ פותר את הבעייה

$$y' = -3y \ , \qquad y(0) = 1$$

(פתרון מדויק $y(t) = e^{-3t}$). איזה קירוב לתשובה מקבלים על ידי שיטת אויילר עם $h = \frac{1}{4}$, ואיזה על ידי שיטת רונגה קוטה עם $h = 1$? באיזה h היה צריך להשתמש בשיטת רונגה קואה כדי לקבל את הדיוק של שיטת אויילר עם $h = \frac{1}{4}$?

2. מוצעת השיטה הסתומה הבאה לפתרון המשוואה $y' = f(y)$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 &= hf(y_n + \alpha k_1 + \beta k_2) \\ k_2 &= hf(y_n + \gamma k_1 + \alpha k_2) \end{aligned}$$

כאן α, β, γ הם קבועים.

(א) מצא את הרקורסיה שמקבלים כאשר מפעילים את השיטה על המשוואה $y' = \lambda y$.

(ב) הרקורסיה המדוייקת שהפתרון של המשוואה $y' = \lambda y$ מקיים היא

$$y_{n+1} = e^{h\lambda}y_n = \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \frac{(h\lambda)^4}{24} + \ldots\right) y_n$$

מצא את תנאים על α, β, γ כך שהרקורסיה שמצאת בסעיף (א) שווה לרקורסיה המדוייקת עד לסדר 4, כלומר ההפרש הוא $O(h^5)$.

(ג) עבור α, β, γ הממלאים את התנאים שמצאת בסעיף (ב), מה הוא תחום היציבות של השיטה ?

3. רוצים למצוא פתרון נומרי לבעיית השפה

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$y_1(0) = 0 \ , \qquad y_1(1) + y_2(1) = 1$$

(הפתרון המדוייק: $y_1 = c\sin x$, $(c = 1/(\sin 1 + \cos 1))$.

(א) מצא את הקירוב הנומרי לפתרון שמוצאים על ידי שיטת הירייה עם שיטת אויילר עם $h = \frac{1}{8}$. שים לב: לקבל את החזקה השמינית של מטריצה ניתן לעשות "בריבוע" שלוש פעמים.

(ב) תאר בקצרה איך היית מוצא קירוב בעל אותו דיוק על ידי שיטת collocation.

4. מה היא שיטת הירידה הטלולה למציאת מינימום של פונקציה?

הוכח שאם מפעילים סיבוב אחד של שיטת הירידה הטלולה על הפונקציה

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2)$$

מקבלים את הרקורסיה

$$(x, y) \to \left(\frac{B^2(B - A)y^2}{A^3x^2 + B^3y^2} x, \frac{A^2(A - B)x^2}{A^3x^2 + B^3y^2} y \right)$$

הוכח מזה שאחרי שני סיבובים של השיטה היחס x/y איננו משתנה, גם כי הוא כן משתנה אחרי סיבוב אחד.

מה הוא האנלוג של הרקורסיה שמקבלים כאשר מפעילים סיבוב אחד של השיטה לפונקציה

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}(A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + \ldots A_nx_n^2) \ ?$$

5. (א) חשב את טרנספורם הפוריה הבדיד של האות $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$ המוגדרת על ידי

$$f_n = \begin{cases} r - n & n = 0, 1, \ldots, r \\ 0 & n = r, r + 1, \ldots, N - r \\ n - (N - r) & n = N - r, \ldots, N - 1 \end{cases}$$

כאן r שלם, קטן מ- $\frac{1}{2}N$. נוסחאות עזר:

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{a^{N+1} - 1}{a - 1} \ , \qquad a \neq 1$$

$$\sum_{n=0}^{N} na^n = \frac{a(Na^{N+1} - (N + 1)a^N + 1)}{(a - 1)^2} \ , \qquad a \neq 1$$

(ב) מהאות $\{g_n\}_{n=0}^{N-1}$ בונים אות אחר $\{h_n\}_{n=0}^{N-1}$ על ידי הנוסחה

$$h_n = \frac{1}{r} \sum_{i=-r}^{r} g_{n+i} \left(1 - \frac{|i|}{r}\right)$$

(r שלם, קטן בהרבה מ- N). מה הוא היחס בין טרנספורם הפוריה הבדיד של $\{h_n\}_{n=0}^{N-1}$ וזה של $\{g_n\}_{n=0}^{N-1}$?