בס"ד

שיטות נומריות 2 88-377, פרופ' ג'. שיף

מועד ב', סמסטר ב', תשס"ד

זמן המבחן: שעתיים וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

יש לענות על כמה שאלות שאפשר. כל השאלות שוות במשקל

1. הסבר איך היית מיישם את שיטת "אויילר משופר" (עם גודל צעד קבוע) כדי למצוא את $y(1)$, כאשר $y(x)$ הוא פתרון המערכת

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -x & 3 \\ -3 & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ , \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

התוצאות האלה התקבלו מיישום שיטת "אויילר משופר" למערכת הזו, עם בחירות שונות של גודל הצעד:

h	$y_1(1)$	$y_2(1)$
$\frac{1}{100}$	0.085285	-0.600368
$\frac{1}{200}$	0.085517	-0.600437
$\frac{1}{300}$	0.085560	-0.600450
$\frac{1}{400}$	0.085574	-0.600455

הסבר את התלות של התוצאות על גודל הצעד, h, ומצא את הקירוב הכי טוב שאפשר לערך האמיתי של $y(1)$.

2. (א) מהו תחום היציבות של שיטת "אויילר משופר" ? יש להוכיח את התוצאה.

(ב) מצא את הערך הכי גדול של h שניתן להשתמש, מטעמי יציבות, בשיטת "אויילר משופר" לפתרון המערכת

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -40 & n \\ -n & -40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ , \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כאן n מקבל את הערכים $10, 50, 100$ (לכל בחירה של n יש למצוא את ה- h המקסימלי).

(ג) כאשר משתמשים בשיטת "אויילר משופר" לפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -x & n \\ -n & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ , \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(שוב n מקבל את הערכים $10, 50, 100$) מוצאים שהערכים הכי גדולים של h שניתן להשתמש בהם הם $h \approx 0.035, 0.0276, 0.0160$ (בהתאם לערכים של n). הסבר!

3. רוצים למצוא מספר חיובי n כך שקיים פתרון לא-טריביאלי למערכת

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -x & n \\ -n & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad , \qquad y_1(0) = y_1(1) = 0$$

מצא קירוב ראשון ל- n כזה על ידי ניחוש לפתרון בצורה

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1-x)(1+ax) \\ b+cx \end{pmatrix}$$

כאשר a, b, c הם קבועים, הצבה במשוואה, ודרישת נכונות המשוואה בנקודות $x = \frac{1}{3}$ ו- $x = \frac{2}{3}$. האם הערך של n שמקבלים נראה לך סביר ? מהו שם השיטה הזאת ?

4. (א) הסבר את חיפוש יחס הזהב למציאת מינימום של פונקציה של משתנה אחד. למה היא יעילה, ובכמה ניתן לקצר קטע שבו נמצא מינימום על ידי n סיבובים של השיטה ? יש להדגים על ידי (לא פחות מ-3 סיבובים) לפונקציה

$$\frac{x(2+x)}{2+\sin x}$$

שיש לו מינימום בין $x = -2$ ובין $x = 0$.

(ב) יודעים שהפונקציה $f(x)$ מתאפסת כאשר $x = 0$ וכאשר $x = 1$, ושהיא אונימודלית, בעלת מינימום יחיד, בין 0 ל-1. רוצים לצמצם את הקטע בו נמצא המינימום, ומותר לנו לחשב את הפונקציה $f(x)$ רק עבור שני ערכים של x. למה הכי טוב לחשב את x בשתי נקודות קרובות ל- $x = \frac{1}{2}$? עם מותר ב-3 נקודות, למה הכי טוב ב- $x = \frac{1}{3}$ וב- $x = \frac{2}{3}$ ואח"כ עוד פעם קרוב או ל- $x = \frac{1}{3}$ או ל- $x = \frac{2}{3}$, תלוי באיזה מהם f יותר נמוך ? מה היית עושה אם מותר לחשב את $f(x)$ 4 פעמים ?

5. הסבר איך ניתן להשתמש ב-FFT (פוריה טרנספורם מהיר) למטרות ביון (אינטרפולציה) בין אוסף נקודות. מה הן ההגבלות על השיטה ?