בס"ד

<u>שיטות נומריות במשוואות דפרנציאליות, 88-379</u> <u>ד"ר ג'רמי שיף</u>

<u>מועד א', סמסטר ב', תשס"א</u>

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
עליך לענות על 3 מתוך 4 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.

1. הסבר את המושג של סדר של שיטה חד-צעדית מפורשת

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$$

לפתרון המשוואה $y' = f(x,y)$.
כאשר משתמשים בשיטה

$$y_{n+1} = \frac{y_n + h\left(x_n + \frac{h}{2}\right)}{1 - hy_n}$$

לפתרון המשוואה $y' = y^2 + x$, עם תנאי התחלה $y(0) = 0$, מקבלים את הקירובים הבאים ל-$y(1)$:

עם $h = 0.1$: $y(1) \approx 0.556006$

עם $h = 0.05$: $y(1) \approx 0.556871$

עם $h = 0.025$: $y(1) \approx 0.557089$

מצא את סדר השיטה, וגם קירוב משופר ל-$y(1)$.

2. מצא את תחום היציבות של השיטה

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tfrac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 &= f\left(x_n + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{12}}\right)h\ ,\ y_n + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{12}}\right)hk_2\right) \\ k_2 &= f\left(x_n + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\sqrt{12}}\right)h\ ,\ y_n + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\sqrt{12}}\right)hk_1\right) \end{aligned}$$

לפתרון המשוואה $y' = f(x,y)$. האם זה נכון שלכל שיטה סתומה אין בעייה של אי-יציבות?

3. למשוואה

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - a^2)y = 0$$

(a פרמטר חיובי) יש פתרון עם $y(0) = 0$ שניתן לכתוב כטור חזקות

$$y = x^a - \frac{1}{4(a+1)}x^{a+2} + \frac{1}{32(a+1)(a+2)}x^{a+4} + \dots$$

הפתרון הזה, עד לכפל על ידי קבוע, הוא הפתרון היחיד של המשוואה עם $y(0) = 0$. הסבר איך להשתמש בשיטת היריה למצוא ערכים של a שעבורם יש פתרון לא-טריביאלי של המשוואה עם $y(0) = y(\pi) = 0$.

4. השתמש ברשת עם $h = \frac{1}{4}$ למצוא קירוב לפתרון הבעייה

$$\begin{aligned} \nabla^2 u = u & \quad 0 < x, y < 1 \\ u(x,0) = u(x,1) = 1 & \quad 0 < x < 1 \\ u(0,y) = u(1,y) = 4y^2 - 4y + 1 & \quad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

הערה: כדאי לקחת בחשבון את הסימטריה בבעיה!

בהצלחה!!