בס"ד

ד"ר ג'רמי שיף

שיטות נומריות במשוואות דפרנציאליות, 88-379

מועד א', סמסטר ב', תשס"ב

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
יש לנסות לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.

1. הוכח שלכל α השיטה

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\alpha f(x_n) + (1-2\alpha) f\left(x_n + \frac{1}{2}hf(x_n)\right) + \alpha f(x_{n+1})\right)$$

לפתרון המערכת $x' = f(x)$ היא מסדר שנים (אבל לא מסדר 3).

2. האם ניתן להשתמש ב-$h = 0.15$ בשיטת modified Euler כדי לפתור את המערכת

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 12 & -2 \end{pmatrix} x$$

בלי לסבול מבעייה של אי-יציבות? מה עם $h = 0.16$? (ניתן להשתמש בקריטריון יציבות ל-modified Euler שהוכחתם בתרגיל.)
כתוב במפורש את הרקורסיה שמקבלים כאשר מפעילים את שיטת ה-trapezoid למערכת זו. יש לכתוב את הרקורסיה בצורה $x_{n+1} = Mx_n$ כאשר M היא מטריצה 2×2 תלויה ב-h.

3. הוכח ש-

$$\frac{1}{6h^2}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} u_{ij}$$

הוא קירוב מסדר 4 ל- $\nabla^2 u + \frac{h^2}{12}\nabla^4 u$. האם אתה יכול להציע דרך להשתמש בנוסחה זו לבנות שיטה לפתרון משוואת Poisson $\nabla^2 u = f$?

4. הסבר, בקיצור, איך היית משתמש בשיטת Crank-Nicolson לפתור את הבעייה

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x}\ , \qquad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ t > 0 \end{matrix}$$

(α פרמטר חיובי). יש להניח ש-$u(x,0), u(0,t), u(1,t)$ הם נתונים.

בהצלחה!!