בס"ד

שיטות נומריות במשוואות דפרנציאליות, 88-379-01 — ד"ר.גרמי שיף
סמסטר ב, תשנ"ז: מועד א

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.
פתרונות נכונים ומנומקים היטב ל-3 שאלות מספיקים לציון מצוין. פתרון לשאלה רביעית רק יוסיף.

1. על ידי שיטת Modified Euler
   א. עם $h = \frac{1}{2}$,
   ב. עם $h = \frac{1}{4}$,
   מצא קירובים ל-$y(1)$, כאשר $y(x)$ פותר את הבעיה

$$y' = -y^2, \qquad y(0) = 1.$$

   הערך המדויק של $y(1)$ הוא $\frac{1}{2}$. האם הטעויות בקירובים שמצאת סבירות ?

2. מצא את תחום היציבות של השיטה

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \\ k_1 &= hf\,(x, y) \\ k_2 &= hf\left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{1}{3}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x + \frac{2h}{3}, y - \frac{1}{3}k_1 + k_2\right) \\ k_4 &= hf\,(x + h, y + k_1 - k_2 + k_3) \end{aligned}$$

   לפתרון המשוואה הדפרנציאלית $y' = f(x, y)$.
   השתמש בשיטה זו, וגם בשיטת Runge-Kutta הסטנדרטי, למצוא קירובים ל-$y(h)$, כאשר $y(x)$ פותר את המשוואה

$$y' = x^4, \qquad y(0) = 0$$

   איזה קירוב יותר טוב ?

3. הסבר איך היית משתמש בשיטת יריה למצוא ערכים λ כך שיש פתרון לא טריביאלי לבעייה

$$y'' = -\lambda^2 y$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

4. אם $u(x, y)$ פותר את המשוואה

$$\nabla^2 u = 1 - u^2$$

בתחום $0 \leq x, y \leq 1$ במישור, עם תנאי שפה $u = 0$ (על כל השפה של התחום), מצא קירובים ל- $u(i/4, j/4)$, $0 \leq i, j, \leq 4$.

בהצלחה!