בס"ד

שיטות נומריות במשוואות דפרנציאליות, 88-379-01 — ד"ר.גרמי שיף
סמסטר ב, תשנ"ז: מועד ב

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.
פתרונות נכונים ומנומקים היטב ל-3 שאלות מספיקים לציון מצוין. פתרון לשאלה רביעית רק יוסיף.

1. על ידי שיטת Runge-Kutta, מצא קירובים ל- $y_1(h), y_2(h)$, כאשר $y_1(x), y_2(x)$ פותרים את הבעייה

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A \end{pmatrix}$$

(A קבוע).
על ידי זה, מצא קירוב לערך החיובי הכי קטן של h שעבורו קיים פתרון לא טריביאלי של הבעייה

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}$$
$$y_1(0) = 0$$
$$y_2(h) = 0$$

2. מצא את תחום היציבות של השיטה

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

לפתרון המשוואה הדפרנציאלית $y' = f(x, y)$, שבה k_1, k_2 מוגדרים על ידי

$$k_1 = hf\left(x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y + \frac{1}{4}k_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)k_2\right)$$
$$k_2 = hf\left(x + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)k_1 + \frac{1}{4}k_2\right)$$

הוכח שכשמפעילים את שיטה זו למשוואה $y' = -\lambda y$, מקבלים

$$y_{n+1} = \left(1 - h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 - \frac{1}{6}(h\lambda)^3\right) y_n + O(h^4).$$

מה המשמעות של תוצאה זו לגבי הסדר של השיטה ?

3. כתוב את משוואות Crank-Nicholson לפתרון הבעייה

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

בתחום $0 < x < 1,\ t > 0$, עם תנאי שפה $u(0,t), u(1,t), u(x,0)$ נתונים.
אם נתון ש-

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

וגם

$$u\left(\frac{1}{4}, 0\right) = -u\left(\frac{3}{4}, 0\right) = 1, \qquad u\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0$$

מצא, על ידי שיטת CN קירובים ל-$u(\frac{1}{4}, nk), u(\frac{1}{2}, nk), u(\frac{3}{4}, nk)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

4. הסבר איך היית משתמש בשיטת Gauss-Seidel לפתור נומרית את המשוואה

$$\nabla^2 u = f(x, y)$$

בתחום Ω במישור (x, y), עם תנאי שפה דיריכלה, זאת אומרת ש-u נתון על השפה של Ω.
כאן $f(x, y)$ היא פונקציה נתונה.

בהצלחה!