בס"ד

שיטות נומריות במשוואות דפרנציאליות, 88-379-01   **ד"ר ג'רמי שיף**

סמסטר ב, תשנ"ח: מועד א

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.

1. על ידי שימוש בשיטת רונגה-קוטה, מצא קירובים ל-$y(h)$ ו-$y'(h)$, כאשר $y(x)$ הוא פתרון הבעיה

$$y'' = -xy \ , \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

הפתרון המדויק הוא

$$y(h) = h - \frac{h^4}{12} + \frac{h^7}{504} + O(h^{10})$$

האם הטעויות בתוצאות של קירוב רונגה-קוטה סבירות?

2. מצא את תחום היציבות של השיטה

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + \mu h, y_n + \mu h f(x_n, y_n))\right]$$

כאן μ הוא פרמטר חיובי. יש לבדוק קודם את המקרה $\mu < \frac{1}{4}$, ואחר כך את המקרה $\mu > \frac{1}{4}$.
עבור איזה μ תחום היציבות הוא הכי גדול?

3. הסבר איך להשתמש בשיטות ירייה למצוא ערכים של n כך שיש פתרון לא טריביאלי לבעיה:

$$y'' + ny\cos x = 0$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

4. רוצים למצוא קירוב ראשון לפתרון המשוואה

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 - u^2 \ , \qquad 0 < x, y < 1$$

שמקיים את תנאי השפה ש-$u = 0$ כאשר $x = 0, 1$ וכאשר $y = 0, 1$. על ידי בחירת סריג עם $h = \frac{1}{5}$ ושימוש בסימטריה, מצא 3 משוואות שנותנות קירובים ל- $u(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}), u(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}), u(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.
(אין צורך לפתור משוואות אלה.)

בהצלחה!