בס"ד

שיטות נומריות במשוואות דפרנציאליות, 88-379-01
סמסטר ב, תשנ"ח: מועד ב

ד"ר ג'רמי שיף

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.

1. א. הראה שכאשר מפעילים את השיטה Backward Midpoint למשוואה $y' = y^2 + x$, מקבלים את הרקורסיה

$$y_{n+1} = \frac{1}{h}\left(1 - \sqrt{1 - 2hy_n - h^2(y_n^2 + 2x_n) - h^3}\right)$$

ב. על ידי שימוש ברקורסיה זאת עם $h = \frac{1}{2}$ ועם $h = \frac{1}{4}$, מצא שני קירובים ל-$y(1)$, כאשר $y(x)$ פותר את הבעיה $y' = y^2 + x$ ו- $y(0) = 0$.

ג. הסדר של שיטת Backward Midpoint הוא 2. איך אפשר לחבר את שתי התוצאות שקבלת בסעיף ב. כדי לקבל קירוב יותר מדויק ל-$y(1)$?

2. מצא את תחום היציבות של שתי השיטות

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))\right]$$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_{n+1})\right]$$

מה היתרון בשיטה השניה? מה היתרון בשיטה הראשונה? הראה שעבור שתי השיטות, כאשר מפעילים את השיטה על המשוואה $y' = -\lambda y$ מקבלים

$$y_{n+1} = y_n\left(1 - h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}\right) + O(h^3)$$

3. כתוב, על ידי הפרשים סופיים, קירובים למשוואות הבאות:

א.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

ב.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

4. הסבר איך אפשר להשתמש בשיטת Gauss-Seidel לפתור את המשוואה

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0 \ , \qquad 0 < x, y < 1$$

כאשר u נתון על השפה של התחום $0 < x, y < 1$.

בהצלחה!