בס"ד

שיטות נומריות במשוואות דפרנציאליות, 88-379 — ד"ר ג'רמי שיף
מועד א', סמסטר ב', תשנ"ט

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
עליך לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.

1. השתמש בשיטת רונגה-קוטה למצוא קירוב ל-$y(h)$ כאשר h קטן ו-$y(x)$ פותר את הבעיה

$$y' = -\frac{x}{y} \ , \qquad y(0) = 1 \ .$$

הפתרון המדויק לבעיה הוא $y(x) = \sqrt{1-x^2}$. בדוק שהטעות בקירוב שמצאת היא $O(h^6)$. האם זה מה שצפית?

2. מצא את יחס הנסיגה שמקבלים משיטת אויילר משופר עבור פתרון המשוואה $y' = -\lambda y$. אם $\lambda = 1 + 10i$ ולוקחים $h = 0.1$ בשיטת אויילר משופר, האם הפתרון הנומרי יציב? (זאת אומרת, האם $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$?) מה אם כאשר $h = 0.11$? מצא (בערך) את ה-h הכי גדול שניתן להשתמש בו ל-λ זה והפתרון הנומרי יהיה יציב.

3. $u(x,y)$ פותר את הבעיה

$$\nabla^2 u + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \qquad 0 < x, y < 1$$
$$u(x,y) = 0 \qquad \begin{cases} x = 0, 1 \\ y = 0, 1 \end{cases}$$

(α קבוע).
א. כתוב מערכת של משוואות שמהם ניתן למצוא קירובים u_{ij} לערכים המדוייקים של הפתרון $u(\frac{i}{N}, \frac{j}{N})$ ($1 \le i, j \le N-1$).
ב. השתמש במשוואות שכתבת בסעיף א, במקרה $N = 3$, למצוא קירובים ל-$u(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $u(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $u(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, ו-$u(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

בהצלחה!!