בס"ד

ד"ר ג'רמי שיף

שיטות נומריות במשוואות דפרנציאליות, 88-379

מועד ב', סמסטר ב', תשנ"ט

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
עליך לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.

1. מצא את תחום היציבות של השיטה הבאה לפתרון הבעיה $y' = f(x,y)$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_0 + 4k_1 + k_2) \\ k_0 &= f(x_n, y_n) \\ k_1 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_0) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n - hk_0 + 2hk_1) \end{aligned}$$

מה מציעות התוצאות שקבלתם לגבי סדר השיטה?

2. על ידי שיטת אויילר עם $h = \frac{1}{4}$, מצא קורוב ל-$y_1(1)$ ו-$y_2(1)$ כאשר $y_1(x)$ ו-$y_2(x)$ הם הפתרון הבעייה

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ -\lambda y_1(x) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

על ידי זה, מצא קירוב לערך של λ שעבורו יש למשוואה למעלה פתרון לא טריביאלי המקיים את תנאיי השפה $y_1(0) = y_1(1) = 0$.

3. בשאלה זאת D הוא התחום במישור המוגבל על ידי המשושה עם קודקודים $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-1,0)$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{1}{2}), -\frac{\sqrt{3}}{2})$. דרוש לפתור את הבעיה

$$\nabla^2 u = 1 \qquad (x,y) \in D$$

אם תנאי שפה $u(x,y) = 0$ בשפה ∂D.

א. הסבר (בקיצור) איך למצוא קירוב לפתרון בעיה זו על ידי שיטת הפרשים סופיים על סריג משולשים עם אורך הצד $1/N$.

ב. על ידי שימוש במה שכתבת בסעיף א עם $N = 3$, מצא קירוב ל-$u(0,0)$.

בהצלחה!!