בס"ד

שיטות נומריות במשוואות דפרנציאליות, 88-379-01   ד"ר.גרמי שיף

סמסטר ב ,תשנ"ו: מועד א

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.
פתרונות נכונים ומנומקים היטב ל-3 שאלות מספיקים לציון מצוין. פתרון לשאלה רביעית רק יוסיף.

1. לבעייה

$$y' = yx^2 + 1 \qquad\qquad y(0) = 1$$

מצא קירובים ל- $y(0.1)$

א. על ידי השיטה Modified Euler, עם צעד אחד של אורך 0.1,

ב. על ידי השיטה Modified Euler, עם שני צעדים של אורך 0.05.

באיזה h היית צריך להשתמש בשיטה Modified Euler לקבל את $y(0.1)$ לדיוק של חלק אחד תוך 10^9 ?

2. שיטה סתומה לפתרון המשוואה

$$y' = f(x,y)$$

מוגדרת על ידי

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{4}h\left[f(x_n,k_1) + 3f(x_n + \tfrac{2}{3}h, k_2)\right]$$

כאשר k_1, k_2 מוגדרות על ידי המשוואות

$$k_1 = y_n + \tfrac{1}{4}h\left[f(x_n,k_1) - f(x_n + \tfrac{2}{3}h, k_2)\right]$$
$$k_2 = y_n + \tfrac{1}{12}h\left[3f(x_n,k_1) + 5f(x_n + \tfrac{2}{3}h, k_2)\right]$$

א. מצא את תחום היציבות של השיטה.

ב. הוכח שכשמפעילים את השיטה עבור המשוואה

$$y' = -\lambda y$$

מקבלים

$$y_{n+1} = y_n\left(1 - h\lambda + \tfrac{1}{2}h^2\lambda^2 + O((h\lambda)^3)\right)$$

מה המשמעות של זה לגבי סדר השיטה ?

3. הסבר
<u>או</u> את שיטת הירייה
<u>או</u> את שיטת האלמנטים הסופיים
לפתרון הבעייה

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \qquad 0 < x < 1$$

$$y(0) = y(1) = 1$$

כאן $a(x), b(x), c(x), f(x)$ הן פונקציות אנליטיות על הקטע $[0,1]$, עם $a(x) > 0$.

4. $u(x,y)$ פותר את הבעייה

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 < x, y < 1$$

$$u(x,0) = x \qquad\qquad u(x,1) = x^2$$

$$u(0,y) = 0 \qquad\qquad u(1,y) = 1$$

א. מצא קירובים ל- $u(\frac{1}{3},\frac{1}{3}), u(\frac{1}{3},\frac{2}{3}), u(\frac{2}{3},\frac{1}{3}), u(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.
ב. על ידי שימוש בקירובים שמצאת בסעיף א., מצא קירוב ל-$u(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
ג. על ידי שימוש בערכים הנתונים של $u(\frac{1}{2},0), u(\frac{1}{2},1), u(0,\frac{1}{2}), u(1,\frac{1}{2})$, מצא עוד קירוב ל-$u(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

בהצלחה!