בס"ד

שיטות נומריות במשוואות דפרנציאליות ,88-379-01 — ד"ר.גרמי שיף
סמסטר ב ,תשנ"ו: מועד ב

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.
פתרונות נכונים ומנומקים היטב ל-3 שאלות מספיקים לציון מצוין. פתרון לשאלה רביעית רק יוסיף.

1. א. כתוב את המשוואה $y'' = -\sin y$ כמערכת של שתי משוואות מסדר ראשון. אם תנאי ההתחלה למשוואה הם $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$, מה הם תנאי ההתחלה המתאימים למערכת ?
   ב. על ידי שיטת Heun עבור המערכת שכתבת בסעיף א, מצא קירובים ל- $y(h)$ ו- $y'(h)$, כאשר $y(x)$ פותר את הבעייה

$$y'' = -\sin y \qquad\qquad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$$

   ג. על ידי שיטת Modified Euler עבור המערכת שכתבת בסעיף א, מצא קירובים ל- $y(h)$ ו- $y'(h)$, כאשר $y(x)$ פותר את הבעייה

$$y'' = -\sin y \qquad\qquad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$$

2. שיטה לפתרון המשוואה $y' = f(x, y)$ מוגדרת על ידי

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}h(k_0 + 4k_1 + k_2) \\ k_0 &= f(x_n, y_n) \\ k_1 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_0) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + (1 - B)hk_0 + Bhk_1) \end{aligned}$$

כאשר B הוא קבוע, $B \geq 1$.
א. מה תחום היציבות של שיטה זו ?
ב. הוכח שאם $B \neq 2$ אזי סדר השיטה היא לא גדולה מ-2.

3. הסבר את שיטות Jacoby ו- Gauss-Seidel לפתרון הבעייה

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u, \qquad 0 < x, y < 1$$

כאשר תנאי השפה, כלומר $u(0,y), u(1,y), u(x,0), u(x,1)$, נתונים.

4. מצא קירוב ל- $u(\frac{1}{2}, n\delta t)$, כאשר $u(x,t)$ פותר את הבעייה

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\
u(x,0) &= 0 \quad 0 < x < 1 \\
u(0,t) &= 0 \quad t > 0 \\
u(1,t) &= 1 \quad t > 0
\end{aligned}$$

א. על ידי השיטה המפורשת למשוואת החום עם $\delta x = \frac{1}{2}$
ב. על ידי שיטת Crank-Nicholson למשוואת החום עם $\delta x = \frac{1}{2}$.
(רמז: הפתרון ליחס הנסיגה

$$x_{n+1} = A + Bx_n$$

הוא

$$\left(\quad x_n = x_0 B^n + A\left(\frac{1-B^n}{1-B}\right)\right.$$

בהצלחה!