בס"ד

גיאומטריה דפרנציאלית, 88-526/826 ד"ר.גרמי שיף

תרגיל 1

1. לעקומה

$$\alpha(s) = \left( a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right) \qquad c^2 = a^2 + b^2$$

א. הוכח שהפרמטר $s$ הוא אורך ארק.

ב. מצא את העיקום ואת העיקול.

2. אם $\alpha(t)$ היא עקומה רגולרית עם פרמטר ב- $\mathbf{R}^3$, הוכח ש-

א.

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$$

ב.

$$\tau(t) = -\frac{\alpha'(t) \cdot \alpha''(t) \wedge \alpha'''(t)}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}$$

על ידי זה, מצא את העיקום ואת העיקול של העקומה

$$\alpha(t) = \left(t, \tfrac{1}{2}t^2, \tfrac{1}{6}t^3\right)$$

3. אם $\alpha(s)$ היא עקומה רגולרית ב- $\mathbf{R}^3$, כאשר $s$ הוא אורך ארק, ו- $\kappa(s) \neq 0$ , אזי $\hat{t}(s)$ היא עקומה רגולרית עם פרמטר ב- $\mathbf{R}^3$ , שנקראת "הקו המחוה הספרי" (The Spherical Indicatrix) של העקומה המקורית. הוכח שהעיקום של הקו המחוה הספרי הוא

$$\sqrt{1 + \frac{\tau^2(s)}{\kappa^2(s)}}$$

4. בשאלה זאת נפתח את התיאוריה של עקומות במישור, זאת אומרת העתקות $\alpha : (a,b) \to \mathbf{R}^2$. לעקומה כזאת אומרים שהפרמטר הוא אורך ארק אם $|\dot{\alpha}(s)| = 1$ . אזי מגדירים את ווקטור המשיק $\hat{t}$ על ידי $\hat{t}(s) = \dot{\alpha}(s)$ . אם הרכיבים של $\hat{t}$ הם $(t^1, t^2)$ אזי מגדירים את ווקטור הנורמלי $\hat{n}(s)$ כווקטור עם רכיבים $(-t^2, t^1)$ . ה"עיקום המסומן" $\kappa(s)$ של $\alpha$ מוגדר על ידי $\dot{\hat{n}}(s) = \kappa(s)\hat{t}(s)$ .

1. הוכח ש-

$$\dot{\hat{t}}(s) = -\kappa(s)\hat{n}(s)$$

2. מזה הסבר למה, אם נתון $\alpha(0), \hat{t}(0)$ (זאת אומרת המיקום ווקטור המשיק בתחילת העקומה), וגם $\kappa(s)$, אזי ניתן למצוא $\alpha(s)$. מצא את כל העקומות במישור עם עיקום מסומן קבוע חיובי, וכולם עם עיקום מסומן קבוע שלילי.
3. ה- evolute של $\alpha$ היא עקומה עם פרמטר $\beta(t)$ שמודגר על ידי

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{\hat{n}(t)}{\kappa(t)}$$

הוכח שבגבול $t_1 \to t_2$, הקווים הנורמליים בנקודות $t_1, t_2$ של $\alpha$ נפגשים על ה- evolute. (הקו הנורמלי בנקודה $t$ הוא הקו שעובר דרך $\alpha(t)$ בכיוון $\hat{n}(t)$ ). מצא את ה- evolute של העקומה $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$.