בס"ד

גיומטריה דפרנציאלית, 88-526/826 — ד"ר.גרמי שיף

תרגיל 2

1. א. האם הגליל

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2=1\right\}$$

הוא משטח פשוט ? מצא פרמטריזציות לגליל.

ב. עבור איזה ערכים של c המשוואה

$$f(x,y,z)=c,\qquad f(x,y,z)=(x+y+z-1)^2$$

מגדירה משטח פשוט ? איך נראים המשטחים האלה ? מה לגבי

$$f(x,y,z)=xyz^2\ ?$$

ג. מצא פרמטריזציות עבור האליפסויד

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ועבור ההיפרבולויד

$$z^2-x^2-y^2=1$$

ד. דרך אחת להגדיר מערכת קואורדינטות לספרה $S=\{x^2+y^2+(z-1)^2=1\}$ זה על ידי "הטלה סטריוגרפית" $\pi: S-\{(0,0,2)\}\to\mathbf{R}^2$. $\pi(x,y,z)$ הוא החיתוך של ישר שעובר דרך $(0,0,2)$ ו- (x,y,z) עם מישור ה-xy. אם $\pi(x,y,z)=(u,v)$, מצא נוסחה מפורשת עבור $\pi^{-1}(u,v)$, והוכח שזה נותן פרמטריזציה של כל S חוץ מנקודה אחת.

2. אם S הוא משטח פשוט, הוכח ששלוש הפונקציות אלה מ- S ל- $\mathbf{R}$ גזירות:

א. $f(p) = |p - p_0|$, כאשר p_0 היא נקודה ב- $\mathbf{R}^3$ שאיננה ב- S.

ב. $f(p) = |p - p_0|^2$, כאשר p_0 היא נקודה כל שהיא ב- $\mathbf{R}^3$.

ג. $f(p) = p.p_0$, כאשר p_0 היא נקודה כל שהיא ב- $\mathbf{R}^3$.

3. הוכח שההגדרה שנתתי בהרצאה של גזירות של פונקציה $f : S_1 \to S_2$ מהמשטח הפשוט S_1 אל המשטח הפשוט S_2 לא תלוי בבחירת קואורדינטות, לא ב- S_1 ולא ב- S_2 .

הספרה S מוגדר כמשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ והאליפסויד E מוגדר כמשטח כמו בשאלה 1. הוכח שפונקציות

$$f_1 : S \to S \qquad f_1(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

$$f_2 : S \to E \qquad f_2(x, y, z) = (ax, by, cz)$$

הם גזירות.

4. א. אם $\alpha(s)$ היא עקומה רגילה, עם פרמטר אורך ארק ועיקום גדול מ-0, ניתן להגדיר משטח שנקרא "משטח צינור" על ידי

$$\vec{f}(s, v) = \alpha(s) + r(\hat{n}(s) \cos v + \hat{b}(s) \sin v), \qquad r > 0.$$

הוכח שאם $r < 1/\kappa(s)$ עבור כל s זה אכן מגדיר משטח רגיל עם פרמטר, ומצא ווקטור בעל אורך 1 בכיוון הנורמלי.

ב. אם $\alpha(s)$ היא עקומה רגילה, עם פרמטר אורך ארק ועיקום גדול מ-0, ניתן להגדיר משטח שנקרא "משטח המשיקים של α" על ידי

$$\vec{f}(s, v) = \alpha(s) + v\hat{t}(s).$$

הוכח שזה אכן מגדיר משטח רגיל עם פרמטר, ומצא ווקטור בעל אורך 1 בכיוון הנורמלי.