בס"ד

גיומטריה דפרנציאלית, 88-526/826 ד"ר.גרמי שיף

תרגיל 4

1. אם (u,v) הם קואורדינטות לסביבה של נקודה p במשטח פשוט S, ו- $u(t),v(t)$ היא עקומה על S שעובר ב- p ב- $t=0$, אזי $(u'(0),v'(0))$ נקרא כיוון ראשי ב-p אם העיקום הנורמלי של העקומה ב- p הוא עיקום ראשי. העקומה נקראת קו של עיקום אם $(u'(t),v'(t))$ כיוון ראשי לכל t.
   א. הוכח ש- (u',v') הוא כיוון ראשי או"א

$$(EM-LF)u'^2+(EN-LG)u'v'+(FN-MG)v'^2=0$$

   ב. הוכח שהעקומות

$$(x(t),y(t))=(at,bt)$$
$$(x(t),y(t))=(a\cos t,a\sin t)$$

   הם קווי עיקום של הפרבולויד $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ (a,b קבועים).
   ג. למשטח כללי, הוכח שהעקומות שבהם u או v קבוע הם קווי עיקום או"א $F=M=0$
   ד. מצא את קווי העיקום עבור משטח הנוצר על ידי סיבוב (תרגיל 3, שאלה 2).

2. א. הוכח שעיקום הגאוס של משטח הנוצר על ידי סיבוב (תרגיל 3, שאלה 2) הוא

$$K=-\frac{f_{zz}}{f(1+f_z^2)^2}$$

   על ידי זה, והבחירה $f(z)=\sqrt{1-z^2}$, וודא שעיקום הגאוס של הספרה הוא 1.
   ב. עם משטח ניתן על ידי

$$\vec{x}(u,v)=(f(v)\cos u,f(v)\sin u,g(v))$$

   כאשר $f_v^2+g_v^2=1$, הוכח שעיקום הגאוס של המשטח ניתן על ידי

$$K=-\frac{f_{vv}}{f}$$

   על ידי הבחירה $f(v)=\sin v,\ g(v)=\cos v$ וודא שוב שעיקום הגאוס של הספרה הוא 1. על ידי הבחירה $f(v)=e^{-v}$ ($v>0$) מצא משטח שעיקום הגאוס שלו הוא -1 בכל נקודה ("Psuedosphere"). תאר את המשטח שמצאת.

3. בשאלה זאת נסמן את התבניות היסודיות הראשונה והשנייה I ו- II בהתאם, זאת אומרת:

$$\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$
$$\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

גם נסמן את עיקום גאוס על ידי K ועיקום ממוצע על ידי H.
התבנית היסודית השלישית מוגדרת על ידי

$$\mathrm{III} = d\hat{N} \cdot d\hat{N}$$

הוכח ש-

$$\mathrm{III} - 2H\mathrm{II} + K\mathrm{I} = 0$$

4. א. האם קיים משטח כך ש-

$$\begin{matrix} E = 1 & F = 0 & G = 1 \\ L = 1 & M = 0 & N = -1 \end{matrix} \quad ?$$

ב. האם קיים משטח כך ש-

$$\begin{matrix} E = 1 & F = 0 & G = \cos^2 u \\ L = \cos^2 u & M = 0 & N = 1 \end{matrix} \quad ?$$