בס"ד

גיומטריה דפרנציאלית, 88-526/826 — ד"ר.גרמי שיף

מבחן מועד ב, תשנ"ז

זמן המבחן: שעתיים
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס
ניקוד כל השאלות שווה
פתרונות נכונים ומנומקים היטב לשלוש שאלות מספיקים לציון 100% במבחן

1. אם $\alpha(s)$ היא עקומה רגולרית ב- $\mathbf{R}^3$, כאשר s הוא אורך ארק, ו- $\kappa(s) \neq 0$, אזי $\hat{n}(s)$ היא עקומה רגולרית עם פרמטר ב- $\mathbf{R}^3$, שנקראת "הקו המחוה הספרי של הנורמל" (The Spherical Indicatrix of the Normal) של העקומה המקורית. הוכח שהעיקום של הקו המחוה הספרי של הנורמל הוא

$$\sqrt{1 + \frac{(\tau(s)\dot{\kappa}(s) - \kappa(s)\dot{\tau}(s))^2}{(\kappa^2(s) + \tau^2(s))^3}}$$

2. א. הוכח ש-

$$\vec{x}(r,\theta) = \left(\frac{r\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{r\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}}, 0\right)$$

הוא פרמטריזציה של המישור $z = 0$. (כאן $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$.)

ב. מצא את המקדמים של התבנית היסודית הראשונה בקואורדינטות (r, θ),

ג. השתמש בתוצאה של סעיף ב. למצוא את האורך של העקומה

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 \\ \theta(t) &= t \end{aligned} \qquad 0 < t < 2\pi.$$

(r_0 קבוע.)

3. א. על ידי שימוש בפרמטריזציה של הטורוס שניתנה בשיעור, מצא את העיקומים הראשיים בכל נקודה של הטורוס.

ב. על ידי שימיש בתוצאות של תרגיל 3, שאלה 3, או אחרת, מצא את עיקום הממוצע של המשטח

$$\vec{x} = (\cosh z\cos\theta, \cosh z\sin\theta, z)$$

4. בשאלה זאת נסמן את התבניות היסודיות הראשונה והשנייה I ו- II בהתאם, זאת אומרת:

$$\mathrm{I} = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$$
$$\mathrm{II} = Ldx^2 + 2Mdxdy + Ndy^2$$

גם נסמן את עיקום גאוס על ידי K ועיקום ממוצע על ידי H.
התבנית היסודית השלישית מוגדרת על ידי

$$\mathrm{III} = d\hat{N} \cdot d\hat{N}$$

הוכח ש-

$$\mathrm{III} - 2H\mathrm{II} + K\mathrm{I} = 0$$

בהצלחה!