בס"ד

שימושים מודרניים במתמטיקה 88-608

תרגיל 3

למדנו בשיעור: במערכת של שתי משוואות דפרנציאליות מסדר ראשון

$$x' = f(x,y)\ , \quad y' = g(x,y)$$

מצב קבוע: $x = x_0, y = y_0$ כך ש־ $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$.

המצב הקבוע יהיה יציב אם ורק אם $\det(A) > 0$ ו־ $\mathrm{Tr}(A) < 0$ כאשר

$$A = \left.\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$

1. בשיעור התעסקנו במודל SIR הפשוט

$$\begin{aligned} S' &= -\beta IS + \gamma R \\ I' &= \beta IS - \nu I \\ R' &= \nu I - \gamma R \end{aligned}$$

הסבר את האיברים במשוואות, והסבר למה ניתן להכליל למקרה של לידה ותמותה טבעית על ידי ההכללה

$$\begin{aligned} S' &= -\beta IS + \gamma R + \delta(I+R) \\ I' &= \beta IS - \nu I - \delta I \\ R' &= \nu I - \gamma R - \delta R \end{aligned}$$

כאשר δ הוא קצב הלידה והתמותה (יש להניח שמתים ונולדים בקצבים שווים - אבל שכל מי שנולד הוא במצב S).

מהו עכשיו התנאי שיהיה מצב קבוע עם $I > 0$? האם מצב זה יהיה יציב ? חזור על הניסויים שעשית במטלב לאשר את התוצאות התאורטיות. יש לקחת $\delta = 0.1, 0.2$.

2. כאשר יש המון נדבקים, יש מודעות רבה לחשש של הדבקות, ולכן קצב ההדבקה יורד. כדי לקחת את זה בחשבון הציעו את מודל SIR משופר

$$\begin{aligned} S' &= -\beta I e^{-I/2N} S + \gamma R \\ I' &= \beta I e^{-I/2N} S - \nu I \\ R' &= \nu I - \gamma R \end{aligned}$$

כאן $N = S + I + R$ הוא מספר הפריטים באוכלוסיה.

חקור את המודל הזה - יש למצוא את המצבים הקובעים, לבדוק את יציבותם, ולאשר על ידי ניסויים נומריים.

3. בדוק על ידי ניסויים נומריים את ההשפעה של גורמים עונתיים במודל SIR על ידי חקר המערכת

$$\begin{aligned} S' &= -(\beta_0 + \beta_1 \cos t) IS + \gamma R \\ I' &= (\beta_0 + \beta_1 \cos t) IS - \nu I \\ R' &= \nu I - \gamma R \end{aligned}$$

האם העלת הפרמטר β_1 מגדיל או מקטין את הסיכוי שהמחלה תמוגר ?

בהצלחה!