

מבחן בקורס: מתמטיקה פיננסית I (620–88)

מועד א', סמסטר סתיו התשע"ה

- קראו את ההוראות הבאות בעיון לפני שאתם ניגשים לענות על המבחן
- משך המבחן: שלוש שעות
- כל חומר עזר אסור בשימוש מלבד מחשבון
- יש לענות על ארבע שאלות בלבד. תשובה נכונה, מפורטת, מנומקת ומלאה לכל שאלה תזכה ב־25 נק'
- עליכם לכתוב את תשובותיכם רק בעט כחול או שחור. הדגשות והערות יכולות להירשם בכל צבע מלבד אדום. בכל מקרה אין לרשום בעיפרון
- נא להקפיד על כתב גדול וברור. תשובות קשות לקריאה לא יבדקו!
- השפות המותרות לשימוש הן עברית ואנגלית בלבד. אין להחליף שפה באמצע שאלה.
- על כל שאלה יש לענות בעמוד נפרד. בראש העמוד כתבו כותרת עם מספר השאלה ("שאלה X"). אם התשובה אורכת יותר מעמוד אחד יש לרשום "שאלה X – המשך" בראש העמודים הרלוונטיים
- תשובות לסעיפים שונים של אותה שאלה יש לרשום אחת תחת השניה ולא בעמודות. כתבו את מספר הסעיף בתחילת התשובה בצורה מודגשת
- לפני הגשת המבחן כתבו על הכריכה הפנימית הימנית של כל מחברת את מספרי השאלות עליהן עניתם במחברת זו. ודאו כי בכל עמוד מופיעה תשובה לשאלה אחת בלבד ובראש העמוד ישנה כותרת עם מספר השאלה
- יש לכתוב את התשובות על העמוד השמאלי בלבד. אין לכתוב בשוליים ובתחתית הדף. העמוד הימני יכול לשמש כטיוטה ואז יש למחוק בהעברת קו ולכתוב בגדול "טיוטה"
- השאלות מנוסחות בלשון רבים אך כל סטודנט/ית נדרש/ת לענות עליהן בעצמו/ה
- נמקו כל צעד. צטטו במלואם משפטים וטענות וציינו נוסחאות בהן השתמשתם
- הבליתו את תשובתכם הסופית והקיפו אותה במסגרת
- תשובה הכוללת אך ורק את המילים "איני יודע/ת" מזכה ב 15% מערך השאלה / סעיף, למעט שאלות או סעיפי בונוס

בהצלחה!

1. (א) הגדירו והסבירו מהי בטא במודל CAPM
 (ב) בסעיף זה הניחו כי השוק נמצא בשיווי משקל לפי מודל CAPM. לתיק השוק תוחלת שיעור תשואה של 15% וסטיית תקן של 20%. הריבית חסרת הסיכון בשוק היא 6%. נתונות שתי מניות:
 מניה A שלה תוחלת שיעור תשואה של 25%
 מניה B שלה סטיית תקן 15% ומקדם מתאם עם תיק השוק של 0.6
 חשבו את הבטא של תיק המורכב מ 60% מניה A ו 40% מניה B.

2. נתונים שני נכסים A, B בעלי שיעור תשואה r_A, r_B שהם משתנים מקריים בעלי פונקציות התפלגות מצטברת $F_A(x), F_B(x)$.

(א) נתונה פונקציה קעורה $U(x)$ בעלת נגזרת שניה רציפה. צטטו אפיון של קעירות במקרה זה

(ב) צטטו שתי הגדרות מתמטיות שונות ליחס שליטה סטוכסטית מסדר שני של A על B ותנו פירוש כלכלי ליחס זה

(ג) הניחו ש r_A, r_B הם מ"מ מפולגים נורמלית: $r_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2), r_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$. מהם התנאים לכך ש A שולט סטוכסטית מסדר ראשון על B במקרה זה? בטאו את תשובתכם בעזרת הפרמטרים $\mu_A, \sigma_A, \mu_B, \sigma_B$.
 תזכורת: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \iff f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ כאשר $f_X(x)$ פונקציית הצפיפות של X

(ד) נתונים קבועים $\lambda > 0, \mu \in (-\infty, \infty)$ וכמו כן נתון שהפונקציה U מסעיף (א) היא פונקציה עולה. הוכיחו כי לכל $c > 0$ מתקיים אי-השוויון

$$U(\mu + c) + U(\mu - c) \geq U(\mu + \sqrt{\lambda c}) + U(\mu - \sqrt{\lambda c})$$

רמז: מומלץ להחליף אגפים ולהשתמש בקשר בין U לנגזרותיה.

(ה) בנוסף לנתון מסעיף (ג) ידוע כי $\mu_A = \mu_B$ וכן $\sigma_A \leq \sigma_B$. הראו ש A שולטת סטוכסטית על B מסדר שני

רמז: השתמשו בסעיף הקודם על-מנת לבחור את λ , כפלו את אי-השוויון בפונקציה מתאימה, הפעילו אינטגרל ובצעו החלפת משתנה.

(ו) **בנוסף!** כעת ידוע רק כי $\mu_A \geq \mu_B$ וכן $\sigma_A \leq \sigma_B$. הסתמכו על הסעיף הקודם והראו שגם במקרה זה A שולטת סטוכסטית על B מסדר שני

3. (א) הוכיחו את הגרסה הפשוטה של APT: אם שיעורי התשואה r_i של n נכסים מוסברים במלואם על-ידי m פקטורים f_j אז קיימים קבועים $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ כך ש

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m b_{i,j} \lambda_j$$

(ב) הסבירו מדוע נוסחה זו תקיפה גם אם לא מניחים היעדר רעש (הגירסה הכללית של APT). אילו הנחות נדרשות לגירסה זו?

(ג) **בנוסף!** הסבירו כיצד ניתן להשתמש בנוסחה זו לתמחור

4. (א) נתונה קבוצת פרסים O . הגדירו את שתי התכונות המאפיינות יחס העדפות על O
- (ב) צטטו שתיים מאקסיומות פון נוימן-מורגנשטרן של תורת התועלת במלואן
- (ג) יורם, אדם שהעדופתיו רציונליות, מדווח כי הוא אדיש בין קבלת \$100 לבין ההגדרלה $L_1 = \left[\frac{5}{8}(0), \frac{3}{8}(500) \right]$. ידוע כי יורם אדיש בין קבלת \$500 לבין ההגדרלה $L(p) = [(1-p)(0), p(1000)]$. מצאו את כל הערכים האפשריים עבור p עבורם נכונה הטענה הבאה: יורם מעדיף את ההגדרלה

$$L_2 = \left[\frac{1}{10}(0), \frac{1}{2}(100), \frac{1}{10}(500), \frac{3}{10}(1000) \right]$$

על פני ההגדרלה

$$L_3 = \left[\frac{3}{10}(0), \frac{2}{10}(100), \frac{3}{10}(500), \frac{2}{10}(1000) \right]$$

נמקו את תשובתכם

5. נתון שוק בעל שלושה נכסים מסוכנים בעלי תוחלת שיעור תשואה $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) = (7, 3, 10)$ וכמו כן נתונה מטריצת השונויות המשותפות

$$\text{COV}(r_i, r_j) = \begin{pmatrix} 3.5 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- (א) מצאו שתי קרנות יעילות
- (ב) האם התיקים הבאים יעילים? נמקו! במידה ולא מצאו תיק יעיל אחר בעל אותה תוחלת שיעור תשואה (או הסבירו מדוע אין כזה)
- תיק A: $(-0.45, 1.27, 0.18)$
- תיק B: $(0.45, 0.1, 0.45)$