

מבחן בקורס: מתמטיקה פיננסית I (620–88)

מועד ב', סמסטר סתיו התשע"ה

- קראו את ההוראות הבאות בעיון לפני שאתם ניגשים לענות על המבחן
- משך המבחן: שלוש שעות
- כל חומר עזר אסור בשימוש מלבד מחשבון
- יש לענות על ארבע שאלות בלבד. תשובה נכונה, מפורטת, מנומקת ומלאה לכל שאלה תזכה ב-25 נק'
- עליכם לכתוב את תשובותיכם רק בעט כחול או שחור. הדגשות והערות יכולות להירשם בכל צבע מלבד אדום. בכל מקרה אין לרשום בעיפרון
- נא להקפיד על כתב גדול וברור. תשובות קשות לקריאה לא יבדקו!
- השפות המותרות לשימוש הן עברית ואנגלית בלבד. אין להחליף שפה באמצע שאלה.
- על כל שאלה יש לענות בעמוד נפרד. בראש העמוד כתבו כותרת עם מספר השאלה ("שאלה X"). אם התשובה אורכת יותר מעמוד אחד יש לרשום "שאלה X – המשך" בראש העמודים הרלוונטיים
- תשובות לסעיפים שונים של אותה שאלה יש לרשום אחת תחת השניה ולא בעמודות. כתבו את מספר הסעיף בתחילת התשובה בצורה מודגשת
- לפני הגשת המבחן כתבו על הכריכה הפנימית הימנית של כל מחברת את מספרי השאלות עליהן עניתם במחברת זו. ודאו כי בכל עמוד מופיעה תשובה לשאלה אחת בלבד ובראש העמוד ישנה כותרת עם מספר השאלה
- יש לכתוב את התשובות על העמוד השמאלי בלבד. אין לכתוב בשוליים ובתחתית הדף. העמוד הימני יכול לשמש כטיוטה ואז יש למחוק בהעברת קו ולכתוב בגדול "טיוטה"
- השאלות מנוסחות בלשון רבים אך כל סטודנט/ית נדרש/ת לענות עליהן בעצמו/ה
- נמקו כל צעד. צטטו במלואם משפטים וטענות וציינו נוסחאות בהן השתמשתם
- הבליטו את תשובתכם הסופית והקיפו אותה במסגרת
- תשובה הכוללת אך ורק את המילים "איני יודע/ת" מזכה ב 15% מערך השאלה / סעיף, למעט שאלות או סעיפי בונוס

בהצלחה!

1. הוכיחו את הטענה הבאה: אם תיק השוק M יעיל אז תוחלת שיעור התשואה של כל נכס i מקיימת את משוואת ה SML. הדרכה:

(א) הציגו את משוואות ה CML וה SML

(ב) צרו צירוף לינארי בין תיק השוק לנכס i והציגו את הקשר הבא:

$$\frac{d\bar{r}_\alpha}{d\sigma_\alpha} = \frac{\frac{d\bar{r}_\alpha}{d\alpha}}{\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}}$$

(ניתן להניח כי הנגזרות החלקיות לא מתאפסות)

(ג) הציבו $\alpha = 0$ והשלימו את ההוכחה

2. נביט בשוק בו יש רק שלושה נכסים. תוחלות שיעורי התשואה הן 10%, 20% ו- 10%. נתונים שני תיקים השייכים לקבוצת התיקים בעלי שונות מינימלית (minimum variance) set): $w = (0.6, 0.2, 0.2)$ ו- $v = (0.8, -0.2, 0.4)$. ידוע שתיק השוק יעיל.

(א) מהו הערך הגדול ביותר ומהו הערך הקטן ביותר האפשריים עבור תוחלת שיעור תשואת תיק השוק?

(ב) איך תשתנה תשובתכם לסעיף הקודם אם נתון בנוסף כי w הוא התיק בעל השונות המינימלית?

3. נתונים שני נכסים A, B בעלי שיעור תשואה r_A, r_B שהם משתנים מקריים בעלי פונקציות התפלגות מצטברת $F_A(x), F_B(x)$. כמו כן ישנו נכס חסר סיכון בעל שיעור תשואה r_f

(א) צטטו שתי הגדרות מתמטיות שונות ליחס שליטה סטוכסטית מסדר ראשון של A על B ותנו פירוש כלכלי ליחס זה

(ב) הניחו ש r_A, r_B הם מ"מ מפולגים נורמלית: $r_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2), r_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$ מהם התנאים לכך ש A שולט סטוכסטית מסדר ראשון על B במקרה זה? בטאו את תשובתכם בעזרת הפרמטרים $\mu_A, \sigma_A, \mu_B, \sigma_B$.

(ג) מהו מדד שארפ של A ? בטאו את תשובתכם בעזרת הפרמטרים μ_A ו σ_A

(ד) ידוע כי מדד שארפ של A גדול ממדד שארפ של B . הוכיחו כי קיים תיק P_α המשקיע חלק α בנכס A ו $1 - \alpha$ בנכס חסר הסיכון כך ש P_α שולט סוכסטית מסדר ראשון על B . הניחו ש $\alpha \geq 0$. מספיק להוכיח עבור המקרים הבאים:

i. $\mu_A > \mu_B, \sigma_A \leq \sigma_B$

ii. $\mu_A > \mu_B, \sigma_A > \sigma_B$

iii. $\mu_A < \mu_B, \sigma_A < \sigma_B$

תזכורת: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ כאשר $X \sim N(\mu, \sigma^2) \iff$ פונקציית הצפיפות של X .

כמו כן ידוע שאם a, b קבועים כלשהם אז $aX + b \sim N(\mu + b, \sigma^2)$

(ה) הוכיחו את הכיוון ההפוך: אם קיים תיק P_α המשקיע חלק α בנכס A ו $1 - \alpha$ בנכס חסר הסיכון כך ש P_α שולט סוכסטית מסדר ראשון על B אז מדד שארפ של A גדול ממדד שארפ של B

בנוס!

4. (א) נתונה קבוצת פרסים O . הגדירו את שתי התכונות המאפיינות יחס העדפות על O
- (ב) צטטו שתיים מאקסיומות פון נוימן-מורגנשטרן של תורת התועלת במלואן
- (ג) נתונות שתי פונקציות תועלת לינאריות U, F המייצגות יחס העדפות של ברוך (שהוא אדם רציונלי) על קבוצת פרסים O . הוכיחו כי קיימים קבועים $a > 0, b \in (-\infty, \infty)$ כך שלכל פרס $x \in O$ מתקיים

$$F(x) = aU(x) + b$$

מספיק להוכיח זאת עבור קבוצת פרסים סופית אשר בה A הוא הפרס המועדף ביותר על ברוך ו B הפרס הכי פחות מועדף

5. נניח כי התועלת של פיטר מתיק ההשקעות שלו נתונה על-ידי $U = \bar{r} - \frac{1}{2}A\sigma^2$ כאשר \bar{r} היא תוחלת שיעור התשואה ו σ^2 שונותה.

- (א) תחת הנחות CAPM, בנו תיק אופטימלי עבור פיטר (הניחו כי $A, r_f, \bar{r}_M, \sigma_M$ ידועים)
- (ב) מהו שיעור התשואה חסרת הסיכון שיניב לפיטר תועלת זהה לתועלת התיק שמצאתם בסעיף (א)?