The No Arbitrage Theorem for Factor Models

ג'רמי שיף - המחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת בר-אילן

03.01.16

Factor Models

n נכסים, תשואות (משתנים מקריים) r_i, $i = 1, \ldots, n$.
d פקטורים, תשואות (משתנים מקריים) f_j, $j = 1, \ldots, d$. נניח $\mathbf{E}[f_j] = 0$.
המודל:

$$r_i = a_i + \sum_{j=1}^{d} b_{ij} f_j + e_i$$

כאשר a_i, b_{ij} מספרים ו- e_i משתנה מקרי ("השגיאה").
b_{ij} מודד כמה פקטור j משפיע על נכס i.
נניח $\mathbf{E}[e_i] = 0$, $\mathrm{cov}(e_i, f_j) = 0$.

ברור ש-

$$\mathbf{E}[r_i] = a_i$$

כלומר a_i היא התוחלת של התשואה של נכס i.

נכתוב

$$A_{jk} = \mathrm{cov}(f_j, f_k)$$

הרבה מחברים מניחים שהפקטורים יהיו בלתי מותאמים, כלומר $A_{jk} = 0$, $j \neq k$.
אפשר גם להניח שהפקטורים הם "מנורמלים" על ידי הדרישה $\mathrm{Var}(f_j) = A_{jj} = 1$.
אנחנו נמנע מהנחות אלה.

נכתוב גם

$$G_{il} = \mathrm{cov}(e_i, e_l)$$

ונמנע מהנחות על מטריצה זו.

כתוצאה מחוסר ההתאמה בין הפקטורים והשגיאות ניתן לכתוב

$$\mathrm{Var}(r_i) = \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{d} b_{ij} f_j\right) + \mathrm{Var}(e_i)$$

כלומר יש פירוק של השונות של התשואה של נכס לשונות סיסטמית ושונות לא-סיסטמית.

איך מוצאים את המקדמים b_{ij} ?
יש לנו

$$\text{cov}\left(r_i, f_k\right) = \text{cov}\left(\sum_{j=1}^{d} b_{ij} f_j, f_k\right) = \sum_{j=1}^{d} b_{ij} A_{jk}$$

אם יש נתונים על התשואות של הנכסים ושל הפקטורים ניתן להוציא אומדנים של $\text{cov}\left(r_i, f_k\right)$ ושל $A_{jk} = \text{cov}\left(f_j, f_k\right)$. ומכאן מוצאים גם אומדנים של b_{ij}. לכל נכס - כלומר לכל i - יש צורך לפתור d משוואות ב- d הנעלמים b_{ij}. יש לשים לב שגם כי

אנחנו מניחים שיש נתונים על התשואות r_i לא הכרח ניתן למצוא מהם אומדן טוב ל- $a_i = \mathbf{E}[r_i]$. אבל בכל זאת לפעמים ניתן לקבל אומדנים טובים על המקדמים b_{ij}.

בהקשר של Factor Models אומרים שיש תמחור ליניארי אם קיימים קבועים $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_j$ כך ש-

$$a_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{d} b_{ij} \lambda_j$$

אומרים ש- λ_j הוא המחיר של סיכון של פקטור j.

תיק ארביטראז' הוא תיק עם עלות 0 ותקבול חיובי וודאי. (או תשואה שלילית וודאית - אז יש צורך למכור את התיק כדי להרוויח.)

כמעט ארביטראז' : משקיעים סכום θ_i בנכס i, לכל i, כך ש-

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 0$$

ו-

$$\sqrt{\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i r_i\right)} << \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \theta_i r_i\right]$$

כתוצאה מכך יש הסתברות גבוהה להרוויח מהתיק, אפילו אם זה לא וודאי.

ארביטראז' אסימפטוטי : עכשיו יש סדרה של תיקים, כך שתיק n בנוי מ-n נכסים, וחושבים על הגבול $n \to \infty$. המשקלות θ_i הם תלויים על n אבל אני לא אסמן את זה. ארביטראז' אסימפטוטי הוא מצב שבו קיים קבוע חיובי δ כך שלכל תיק

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 0 \,, \qquad \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \theta_i r_i\right] \geq \delta$$

ו-

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i r_i\right) = 0$$

חוסר ארביטראז' גורר תמחור ליניארי

ב-Factor Model עם $||G||_2$ סופי, אם אין ארביטראז' אסימפטוטי אזי יש תמחור ליניארי עד כדי טעות עם נורמה סופית, כלומר קיימים קבועים $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_d$ כך ש-

$$a_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{d} b_{ij}\lambda_j + \nu_i$$

עם

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^2 < \infty$$

בהנתן, נגיד, 3 וקטורים $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ בעלי מימד גדול n, ועוד וקטור $\mathbf{y}$, בדרך כלל לא ניתן למצוא מספרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש-

$$\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{x}_3 .$$

יש יותר סיכוי למצוא $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש-

$$\mathbf{y} \approx \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{x}_3 .$$

באיזה מובן הקירוב? נגדיר את וקטור השאריות

$$\mathbf{R} = \mathbf{y} - (\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{x}_3)$$

ונדרוש ש"סכום ריבועי השאריות"

$$S = \sum_{i=1}^{n} R_i^2$$

יהיה קטן.

נבחר $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ע"י הדרישה

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = 0$$

לא נעבור על כל הצעדים של הפיתוח, ניתן רק את התשובה הסופית. נגדיר את X להיות המטריצה עם עמודים $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. אזי יש לקחת

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}$$

יש צורך להניח שהמטריצה $X^T X$ היא הפיכה.

אני זקוק לתוצאה הבאה: עם בחירה זו של $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ וקטור השאריות $\mathbf{R}$ הוא מאונך לווקטרים $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. או בלשון אחר, $X^T \mathbf{R} = 0$.

זה לא קשה להוכיח. היות ו-

$$\mathbf{R} = \mathbf{y} - X \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

יש לנו ש-

$$X^T\mathbf{R} = X^T\mathbf{y} - X^TX \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

וזה מתאפס, היות ולקחנו

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = (X^TX)^{-1}X^T\mathbf{y}$$

הוכחת המשפט

המשפט אומר שחוסר ארביטראז' אסימפטוטי גורר תמחור לינארי עד כדי טעות "קטנה". נוכיח בשלילה שאם הטעות בתמחור לינארי היא לא מספיק קטנה אזי קיים ארביטראז' אסימפטוטי.

נגדיר (ל-n נתון)

$$\nu_i = a_i - \lambda_0 - \sum_{j=1}^{d} b_{ij}\lambda_j$$

ונבחר את הקבועים $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_d$ כך ש- $S = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^2$ הוא מינימלי. זה ריבועים מזעריים! (הווקטור $\mathbf{y}$ הוא הווקטור של תשואות ממוצעות a_i, הווקטור $\mathbf{x}$ הראשון הוא הווקטור

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$$

ויש עוד ווקטור $\mathbf{x}$ לכל פקטור, עם רכיבים b_{ij} לפקטור j)

הוכחת המפשט

לפי מה שלמדנו על ריבועים מזעריים, לבחירה זו של הקבועים $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_d$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i = 0 \ , \qquad \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\nu_i = 0$$

("ווקטור השאריות מאונך לווקטורים $\mathbf{x}$".)

עכשיו נבנה תיק אם השקעה

$$\theta_i = \psi \nu_i$$

בנכס i, כאשר ψ הוא קבוע שנקבע בהמשך. התקבול הוא

$$r = \sum_{i=1}^{n} \theta_i r_i = \psi \sum_{i=1}^{n} \nu_i r_i$$

ותוחלת התקבול היא

$$\psi \sum_{i=1}^{n} \nu_i a_i = \psi \sum_{i=1}^{n} \nu_i \left(\lambda_0 + \sum_{j=1}^{d} b_{ij}\lambda_j + \nu_i \right) = \psi \sum_{i=1}^{n} \nu_i^2 \ .$$

הגיע זמן לקבוע את ψ. נקח אותו להיות

$$\psi = \frac{\delta}{\sum_{i=1}^{n} \nu^2}$$

כאשר δ הוא קבוע חיובי שניתן לבחור באופן חופשי. ולכן בנינו תיק עם סה"כ השקעה 0 (כי $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = \psi \sum_{i=1}^{n} \nu_i = 0$) ותוחלת תקבול חיובית δ.
מהי השונות של התשואה? יש לנו

$$r = \psi \sum_{i=1}^{n} \nu_i r_i = \psi \sum_{i=1}^{n} \nu_i \left(a_i + \sum_{j=1}^{d} b_{ij} f_j + e_i \right) = \psi \sum_{i=1}^{n} \nu_i (a_i + e_i)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(r) = \psi^2 \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i e_i \right) = \psi^2 \sum_{i,l=1}^{n} \nu_i \nu_l \mathrm{cov}(e_i, e_l) = \psi^2 \sum_{i,l=1}^{n} G_{il} \nu_i \nu_l$$

הוכחת המפשט

במפשט מופיעה הנחה ש- $||G||_2$ הוא סופי. $||G||_2$ מוגדר להיות המספר הכי קטן כך שלכל ווקטור $\mathbf{x}$ מתקיים

$$\sum_{i,l=1}^{n} G_{il}x_i x_l \leq ||G||_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

לכל n סופי המספר $||G||_2$ הוא בהכרח סופי. הכוונה של הביטוי "$||G||_2$ סופי" במשפט היא שגם כאשר n שואף ל- ∞ ה- $||G||_2$ נשאר חסום.

ולכן לכל n יש לנו תיק עם סה"כ הוצאה 0, תוחלת תקבול δ, ושונות

$$\mathrm{Var}(r) = \psi^2 \sum_{i,l=1}^{n} G_{il}\nu_i\nu_l \leq \psi^2 ||G||_2 \sum_{i=1}^{n} \nu_i^2 = \frac{\delta^2 ||G||_2}{\sum_{i=1}^{n} \nu_i^2}$$

נשאר לשים לב לזה שאם הסכום $\sum_{i=1}^{n} \nu_i^2$ מתבדר אזי השונות שואף ל-0 ויש לנו ארביטראז' אסימפטוטי. ולכן הסכום לא יכול להתבדר. •

דיון

הערה לשלב האחרון: יש לשים לב שהמספרים ν_i הם תלויים על n, אבל בכל זאת ניתן להוכיח שהסכומים $\sum_{i=1}^n \nu_i^2$ עולים עם n. ולכן או שהסכום הזה מתבדר כאשר $n \to \infty$ ואז יש ארביטראז' אסימפטוטי, או שהוא חסום.

כתוצאה מההערה הזאת - במצב שאין ארביטראז' אסימפטוטי קיימים נכסים עם ν_i מאוד נמוך (נמוך מכל מספר חיובי שתבחר). אלה הם נכסים יעילים. לנכס יעיל קיים תמחור לינארי ללא טעות (המצב דומה למה שראינו בהקשר של ה-CAPM). היות ומשקיע רציונלי ישקיע אך רק בנכסים יעילים, לכל נכס אחר המחיר ירד עד שהוא יעיל. ולכן בעולם אידיאלי של Factor Model, מספר גדול של נכסים, חוסר ארביטראז', משקיעים רציונליים, ניתן להגיד שתמחור לינארי מתקיים באופן מדוייק.

דיון

קצת מהשאלות שעולות:

- כיצד מוצאים אומדנים למחירי הסיכון של הפקטורים λ_j (וגם ל- λ_0)?
- כיצד בונים תיקים יעילים עם חשיפה רק לפקטור אחד?
- כיצד בפועל מזהים הזדמנויות ל(כמעט) ארביטראז' בשוק? (בהנחת Factor Model)
- מהן ההשפעות של מספר סופי של נכסים, חוסר ידיעה מוחלטת של A_{jk} ושל b_{ij} וכו' ?