בס"ד

דף נוסחאות עיקריות

ריבית קבועה: NPV של סדרה של תשלומים a_i בזמנים t_i ($a_i > 0$ הכנסה, $a_i < 0$ הוצאה). להרכבה רציפה (מועדף)

$$\text{NPV} = \sum_i a_i e^{-rt_i}$$

לרכבה שנתית:

$$\text{NPV} = \sum_i \frac{a_i}{(1+r)_i^t}$$

משך:

$$D = \frac{1}{\text{NPV}} \sum_i a_i t_i e^{-rt_i}$$

לאג"ח סטנדרטי ערך נקוב 1, קופון שנתי $100y\%$, לתקופת N שנים

$$\text{NPV} = y\frac{1-e^{-rN}}{e^r - 1} + e^{-rN}$$

$$D = \frac{y\frac{e^{rN}-1}{1-e^{-r}} + N(e^r - 1 - y)}{ye^{rN} + (e^r - 1 - y)}$$

רגישות לשער הריבית

$$\frac{d\text{NPV}(r)}{dr} = -D(r)\text{NPV}(r)$$

ריבית משתנה: שערי spot $s(t)$

$$\text{NPV} = \sum_i a_i e^{-s(t_i)t_i} \ , \quad D = \frac{1}{\text{NPV}} \sum_i a_i t_i e^{-s(t_i)t_i}$$

שער forward מזמן t_1 עד זמן t_2:

$$f(t_1, t_2) = \frac{t_2 s(t_2) - t_1 s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

short rates : $r(t) = f(t, t+1)$

תורת תוחלת-שונות. r_i (משתנה מקרי) תשואה של נכס i, $\mu_i = \mathbf{E}[r_i]$, $\sigma_i^2 = \text{Var}(r_i)$, $\sigma_{ij} = \text{cov}(r_i, r_j)$. תיק: משקלות w_i, $\sum_i w_i = 1$, תשואה $r = \sum w_i r_i$. בעיית מרקוביץ. לשונות מינימלית עם תוחלת תשואה נתונה μ יש לדרוש

$$\sum \sigma_{ij} w_j - \lambda_1 \mu_i - \lambda_2 = 0 \ , \quad \sum w_i \mu_i = \mu \ , \quad \sum w_i = 1$$

עבור λ_1, λ_2 כלשהם. לנקודת שונות מינימלית יש לקחת $\lambda_1 = 0$. הנקודות הקשורות במישור (σ, μ) הם בהיפרבולה

$$\sigma^2 = \frac{a\mu^2 - 2b\mu + c}{ac - b^2}$$

$$a = \mathbf{e}^T \Omega^{-1} \mathbf{e} \ , \quad b = \mathbf{m}^T \Omega^{-1} \mathbf{e} \ , \quad b = \mathbf{m}^T \Omega^{-1} \mathbf{m}$$

($\mathbf{e}$ ווקטור של 1'ים, $\mathbf{m}$ ווקטור של תוחלות תשואות, Ω מטריצה של קו-ווריאנצים.)

תיק השוק במשפט קרן אחת:

$$w = K\Omega^{-1}(\mathbf{m} - r_f \mathbf{e})$$

במקרה של רק שני נכסים עם סיכון. בנקודת השונות המינימלית

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \ , \qquad w_2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

CAPM . קו שוק ההון: היחס במישור (σ,μ) לתיקים יעילים

$$\mu - r_f = \sigma\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$$

השיפוע מייצג את העלות של סיכון. מודל CAPM - תוחלת התשואה של כל נכס מקיימת

$$\mu_i - r_f = \beta_i(\mu_M - r_f)\ , \qquad \beta_i = \frac{\sigma_{Mi}}{\sigma_M^2}$$

סיכון סיסטמי וסיכון לא-סיסטמי:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_M^2 + \mathrm{Var}(e_i)$$

אלפא של ג'נסן:

$$\overline{r_i} - r_f = \beta_i(\mu_M - r_f) + \alpha_i$$

יחס שרפ של נכס הוא $\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}$. יש להשוות מול יחס שרפ של השוק $\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$.
CAPM כנוסחת תמחור: אם התשלום בסוף של הנכס הוא Q אז המחיר שלו P אמור לקיים

$$P = \frac{\mathbf{E}[Q]}{1 + r_f + \beta(\mu_M - r_f)} = \frac{\mathbf{E}[Q] - \mathrm{cov}(Q, r_M)\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2}}{1 + r_f}$$

מודלים עם פקטורים וחוסר ארביטראז'. מודל עם פקטורים

$$r_i = a_i + \sum_j b_{ij} f_j + e_i$$

הפקטורים f_j, $\mathbf{E}[f_j] = 0$, $A_{jk} = \mathrm{cov}(f_j, f_k)$.
השגיאות e_i, $\mathbf{E}[e_i] = 0$, $\mathrm{cov}(e_i, f_j) = 0$, $G_{il} = \mathrm{cov}(e_i, e_l)$.
$a_i = \mathbf{E}[r_i]$.
חישוב המקדמים b_{ij}: $\mathrm{cov}(r_i, f_k) = \sum_j b_{ij} A_{jk}$
פירוק השונות

$$\mathrm{Var}(r_i) = \mathrm{Var}\left(\sum_j b_{ij} f_j\right) + \mathrm{Var}(e_i)$$

תמחור לינארי:

$$a_i = \lambda_0 + \sum_j b_{ij}\lambda_j$$

λ_j הוא מחיר הסיכון של פקטור j. משפט חוסר ארביטראז': במודל עם פקטורים עם $||G||_2$ סופי, אם אין ארביטראז' אסימפטוטי אזי יש תמחור לינארי עד לשגיאה עם נורמה סופית.

תורת התועלת: משפט ג'נסן לפונקצייה קמורה f: $\mathbf{E}[f(X)] \geq f(\mathbf{E}[X])$.
שווי ודאי C של תקבול X שהוא משתנה מקרי: $U(C) = \mathbf{E}[U(X)]$.
פרמיית סיכון: $\pi(X) = \mathbf{E}[X] - C$ כלומר

$$U(\mathbf{E}[X] - \pi(X)) = \mathbf{E}[U(X)]$$

פונקציית שנאת הסיכון המוחלט של Arrow-Pratt: $A(x) = -U''(x)/U(x)$. פונקציית שנאת הסיכון היחסי: $xA(x)$.
משפט Pratt: שלושת הדברים הבאים הם שקולים: 1) $\pi_1(X) > \pi_2(X)$ לכל משתנה מקרי לא טריביאלי X.
2) $A_1(x) > A_2(x)$ לכל x. 3) $U_1(x) = G(U_2(x))$ כאשר G היא פונקצייה קעורה.
בעיית בחירת תיק. n נכסים, מחירים $P_1, \ldots, P_n$, תשלומים בסוף $Q_1, \ldots, Q_n$ (משתנים מקרים). קונים θ_i יחידות של נכס i. יש לבחור את θ_i כך ש-

$$\mathbf{E}\left[U'\left(\sum_i \theta_i Q_i\right) Q_i\right] = \lambda P_i\ , \qquad \sum \theta_i P_i = W$$

כאשר W מייצג את ההון הכולל של המשקיע. המקרה של $U(x) = \ln(x)$ - "log optimal pricing":

$$P_i = \mathbf{E}\left[\frac{Q_i}{R^*}\right]$$

כאשר R^* מסמן את התשואה של התיק האופטימלי.