בס"ד

מתמטיקה פיננסית 1, 88-620, פרופ' ג'רמי שיף

מבחן מועד א', סמסטר א', תשע"ו

משך המבחן: 3 שעות

כל חומר עזר אסור מלבד מחשבון ודף הנוסחאות המצורף.

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. תשובה נכונה, מפורטת, מנומקת ומלאה לכל שאלה תזכה ב־ 25 נקודות.

1. (א) (5 נקודות) בפרוייקט א' משקיעים 100 דולר בזמן 0 ומקבלים 22 דולר בסוף כל שנה ל-5 שנים.
בפרוייקט ב' משקיעים 100 דולר בזמן 0 ומקבלים 24 דולר בסוף כל שנה ל-5 שנים.
חשב את ה-NPV של שני הפרוייקטים בהנחת שער ריבית 5%.

(ב) (5 נקודות) בפרוייקט מסויים משקיעים A דולר בזמן 0 ומקבלים B דולר בסוף כל שנה ל-N שנים. איזו משוואה יש לפתור כדי למצוא את ה-IRR ? (אין צורך לפתור את המשוואה.)

(ג) (7 נקודות) אם x קטן (בערך מוחלט) $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. העזר בזה למצוא קירוב לפתרון של המשוואה שמצאת בסעיף הקודם, בהנחה שה-IRR הוא קטן.
הערה: יש דרכים שונות לפתור סעיף זה שמובילות לנוסחאות שונות! באחת הדרכים ניתן להסתדר עם הקירוב $e^x \approx 1 + x$.

(ד) (8 נקודות) על ידי שימוש בתוצאה של הסעיף הקודם, או על ידי חישוב ישיר, מצא קירובים ל-IRR'ים של פרוייקטים א' וב' מסעיף (א). אם משתמשים בתוצאה של הסעיף הקודם יש לבדוק שמקבלים תוצאה סבירה!

2. בטבלה מופיעים שערי הריבית ה-spot באחוזים מאתר ה-Treasury להיום:

שנה	שנתיים	3 ש'	5 ש'	7 ש'	10 ש'
0.52	0.71	0.85	1.15	1.46	1.71

(א) (3 נקודות) איך היית עושה קירוב לשערים לתקופות של 4,6,8,9 שנים ?

(ב) (5 נקודות) מצא את ה-NPV ואת המשך (המח"מ) של אגרת חוב ל-10 שנה עם ערך נקוב 100 דולר וקופון שנתי 10 דולר. (יש להסתמך על התוצאות של הסעיף הקודם.)

(ג) (5 נקודות) הסבר בקצרה את החשיבות של המשך של אגרת חוב.

(ד) (12 נקודות) רוצים להמיר את האג"ח של סעיף (ב) לחוב שישלם A דולר אחרי X שנים ועוד A דולר בסוף 10 שנה (כאן X לא בהכרח שלם). רוצים למצוא את A ואת X כך שיש אותו NPV ואותו משך לחוב החדש כמו שיש לאג"ח. מצא זוג של משוואות שניתן לפתור אותן למצוא את A ואת X (אין צורך לפתור את המשוואות). האם לדעתך X הוא קטן מ- או גדול מ-5?

3. לתשואות של שלושת הנכסים בשוק יש תוחלות

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$$

ומטריצת קו-וריאנצים

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(א) (7 נקודות) מצא את התיק עם שונות מינימלית. מצא את ההרכב של התיק, את התוחלת ואת השונות של התשואה שלו.

(ב) (7 נקודות) מצא עוד תיק יעיל. מצא את ההרכב של התיק, את התוחלת ואת השונותשל התשואה שלו.

(ג) (11 נקודות) תאר את הקבוצה של התיקים היעילים שניתן לבנות ללא צורך במכירה בחסר. מהי תוחלת התשואה המקסימלית לתיק כזה?

4. (א) (10 נקודות) טוענים שיש 3 מצבים אפשריים לעולם, שלושתם בעלי הסתברות $\frac{1}{3}$. ב-3 המצבים התשואות של נכס מסויים הן $-30\%, +15\%, +20\%$ והתשואות של השוק הן $-20\%, +5\%, +15\%$ בהתאם. חשב את התוחלת ואת השונות של התשואה של הנכס ושל התשואה של השוק, ואת הקו-ווריאנץ שלהם. הראה שמצב זה אינו תואם מודל CAPM אלא אם כן שער הריבית חסר סיכון הוא $r_f \approx -3.33\%$.

(ב) (10 נקודות) בעולם עם רק שני נכסים עם סיכון טוענים שיש 3 מצבים אפשריים לעולם, שלושתם בעלי הסתברות $\frac{1}{3}$. ב-3 המצבים התשואות של הנכס הראשון הם $-30\%, +15\%, +20\%$ והתשואות של הנכס השני הם $-10\%, -5\%, +10\%$ בהתאם. חשב את התוחלת ואת השונות של התשואות של שני הנכסים, ואת הקו-ווריאנץ שלהם. מצא את התשואה של תיק השוק בהנחה שמודל CAPM קיים עם שער ריבית חסר סיכון כלשהוא r_f.

(ג) (5 נקודות) הסבר למה המצב המתואר בסעיף (ב) מסתדר עם מודל CAPM לכל ערך של r_f אבל המצב בסעיף (א) מסתדר רק לערך ספציפי של r_f.

5. תזכורות: ל- c קטן בערך מוחלט

$$\begin{aligned} e^c &\approx 1 + c + \frac{1}{2}c^2 \\ \ln(1+c) &\approx c - \frac{1}{2}c^2 \end{aligned}$$

(א) (7 נקודות) אם $U(x) = -e^{-\alpha x}$ כאשר α הוא מספר חיובי קטן, הוכח שפרמיית הסיכון $\pi(X)$ מקיימת

$$\pi(X) \approx \frac{1}{2}\alpha \mathrm{Var}(X)$$

אין להסתמך על תוצאה כלשהיא מההרצאות, יש להוכיח באופן מלא.

(ב) (8 נקודות) אם $U(x) = -e^{-\alpha x}$ כאשר α הוא מספר חיובי, ו- X, Y הם בלתי תלויים, הוכח ש-

$$\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y)$$

(ג) (10 נקודות) הוכח שבאופן כללי, לפונקציית תועלת קעורה כללית $U(x)$, לא בהכרח מתקיים

$$\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y)$$

למשתנים מקריים בלתי תלויים X, Y. מומלץ לנסות למצוא דוגמת נגד.

בהצלחה!

בס"ד

דף נוסחאות עיקריות

ריבית קבועה: NPV של סדרה של תשלומים a_i בזמנים t_i ($a_i > 0$ הכנסה, $a_i < 0$ הוצאה). להרכבה רציפה (מועדף)

$$\mathrm{NPV} = \sum_i a_i e^{-rt_i}$$

לרכבה שנתית:

$$\mathrm{NPV} = \sum_i \frac{a_i}{(1+r)_i^t}$$

משך:

$$D = \frac{1}{\mathrm{NPV}} \sum_i a_i t_i e^{-rt_i}$$

לאג"ח סטנדרטי ערך נקוב 1, קופון שנתי $100y\%$, לתקופת N שנים

$$\mathrm{NPV} = y\frac{1-e^{-rN}}{e^r - 1} + e^{-rN}$$

$$D = \frac{y\frac{e^{rN}-1}{1-e^{-r}} + N(e^r - 1 - y)}{ye^{rN} + (e^r - 1 - y)}$$

אם מצרפים x יחידות של נכס 1 ו-y יחידות של נכס 2:

$$\mathrm{NPV} = x\mathrm{NPV}_1 + y\mathrm{NPV}_2 \,, \qquad D = \frac{x\mathrm{NPV}_1 D_1 + y\mathrm{NPV}_2 D_2}{NPV}$$

רגישות לשער הריבית

$$\frac{d\mathrm{NPV}(r)}{dr} = -D(r)\mathrm{NPV}(r)$$

ריבית משתנה: שערי spot $s(t)$

$$\mathrm{NPV} = \sum_i a_i e^{-s(t_i)t_i} \,, \quad D = \frac{1}{\mathrm{NPV}} \sum_i a_i t_i e^{-s(t_i)t_i}$$

שער forward מזמן t_1 עד זמן t_2:

$$f(t_1, t_2) = \frac{t_2 s(t_2) - t_1 s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

short rates : $r(t) = f(t, t+1)$

תורת תוחלת-שונות. r_i (משתנה מקרי) תשואה של נכס i, $\mu_i = \mathbf{E}[r_i]$, $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(r_i)$, $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(r_i, r_j)$. תיק: משקלות w_i, $\sum_i w_i = 1$, תשואה $r = \sum w_i r_i$. שונות $\sum w_i w_j \sigma_{ij}$. בעיית מרקוביץ. לשונות מינימלית עם תוחלת תשואה נתונה μ יש לדרוש

$$\sum \sigma_{ij} w_j - \lambda_1 \mu_i - \lambda_2 = 0 \,, \quad \sum w_i \mu_i = \mu \,, \quad \sum w_i = 1$$

עבור λ_1, λ_2 כלשהם. לנקודת שונות מינימלית יש לקחת $\lambda_1 = 0$. הנקודות הקשורות במישור (σ, μ) הם בהיפרבולה

$$\sigma^2 = \frac{a\mu^2 - 2b\mu + c}{ac - b^2}$$

$$a = \mathbf{e}^T \Omega^{-1} \mathbf{e} \,, \quad b = \mathbf{m}^T \Omega^{-1} \mathbf{e} \,, \quad b = \mathbf{m}^T \Omega^{-1} \mathbf{m}$$

($\mathbf{e}$ ווקטור של 1'ים, $\mathbf{m}$ ווקטור של תוחלות תשואות, Ω מטריצה של קו-ווריאנצים.)

תיק השוק במשפט קרן אחת:

$$w = K\Omega^{-1}(\mathbf{m} - r_f \mathbf{e})$$

במקרה של רק שני נכסים עם סיכון. בנקודת השונות המינימלית

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \,, \qquad w_2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

CAPM. קו שוק ההון: היחס במישור (σ,μ) לתיקים יעילים

$$\mu - r_f = \sigma\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$$

השיפוע מייצג את העלות של סיכון. מודל CAPM - תוחלת התשואה של כל נכס מקיימת

$$\mu_i - r_f = \beta_i(\mu_M - r_f)\ , \qquad \beta_i = \frac{\sigma_{Mi}}{\sigma_M^2}$$

סיכון סיסטמי וסיכון לא-סיסטמי:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_M^2 + \mathrm{Var}(e_i)$$

אלפא של ג'נסן:

$$\overline{r_i} - r_f = \beta_i(\mu_M - r_f) + \alpha_i$$

יחס שרפ של נכס הוא $\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}$. יש להשוות מול יחס שרפ של השוק $\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$.
CAPM כנוסחת תמחור: אם התשלום בסוף של הנכס הוא Q אז המחיר שלו P אמור לקיים

$$P = \frac{\mathbf{E}[Q]}{1 + r_f + \beta(\mu_M - r_f)} = \frac{\mathbf{E}[Q] - \mathrm{cov}(Q, r_M)\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2}}{1 + r_f}$$

מודלים עם פקטורים וחוסר ארביטראז'. מודל עם פקטורים

$$r_i = a_i + \sum_j b_{ij}f_j + e_i$$

הפקטורים f_j, $\mathbf{E}[f_j] = 0$, $A_{jk} = \mathrm{cov}(f_j, f_k)$.
השגיאות e_i, $\mathbf{E}[e_i] = 0$, $\mathrm{cov}(e_i, f_j) = 0$, $G_{il} = \mathrm{cov}(e_i, e_l)$.
$a_i = \mathbf{E}[r_i]$.
חישוב המקדמים b_{ij}: $\mathrm{cov}(r_i, f_k) = \sum_j b_{ij}A_{jk}$
פירוק השונות

$$\mathrm{Var}(r_i) = \mathrm{Var}\left(\sum_j b_{ij}f_j\right) + \mathrm{Var}(e_i)$$

תמחור לינארי:

$$a_i = \lambda_0 + \sum_j b_{ij}\lambda_j$$

λ_j הוא מחיר הסיכון של פקטור j. משפט חוסר ארביטראז': במודל עם פקטורים עם $||G||_2$ סופי, אם אין ארביטראז' אסימפטוטי אזי יש תמחור לינארי עד לשגיאה עם נורמה סופית.

תורת התועלת: משפט ג'נסן לפונקציה קמורה f: $\mathbf{E}[f(X)] \geq f\left(\mathbf{E}[X]\right)$.
שווי ואדאי C של תקבול X שהוא משתנה מקרי: $U(C) = \mathbf{E}[U(X)]$.
פרמיית סיכון: $\pi(X) = \mathbf{E}[X] - C$ כלומר

$$U\left(\mathbf{E}[X] - \pi(X)\right) = \mathbf{E}[U(X)]$$

פונקציית שנאת הסיכון המוחלט של Arrow-Pratt: $A(x) = -U''(x)/U'(x)$. פונקציית שנאת הסיכון היחסי: $xA(x)$.
משפט Pratt: שלושת הדברים הבאים הם שקולים: 1) $\pi_1(X) > \pi_2(X)$ לכל משתנה מקרי לא טריביאלי X.
2) $A_1(x) > A_2(x)$ לכל x. 3) $U_1(x) = G(U_2(x))$ כאשר G היא פונקציה קעורה.
בעיית בחירת תיק. n נכסים, מחירים $P_1, \ldots, P_n$, תשלומים בסוף $Q_1, \ldots, Q_n$ (משתנים מקרים). קונים θ_i יחידות של נכס i. יש לבחור את θ_i כך ש-

$$\mathbf{E}\left[U'\left(\sum_i \theta_i Q_i\right)Q_i\right] = \lambda P_i\ , \qquad \sum \theta_i P_i = W$$

כאשר W מייצג את ההון הכולל של המשקיע. המקרה של $U(x) = \ln(x)$ - "log optimal pricing":

$$P_i = \mathbf{E}\left[\frac{Q_i}{R^*}\right]$$

כאשר R^* מסמן את התשואה של התיק האופטימלי.