בס"ד

מתמטיקה פיננסית 1, 88-620, פרופ' ג'רמי שיף
מבחן מועד א', סמסטר א', תשע"ו - עם פתרונות

משך המבחן: 3 שעות
כל חומר עזר אסור מלבד מחשבון ודף הנוסחאות המצורף.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. תשובה נכונה, מפורטת, מנומקת ומלאה לכל שאלה תזכה ב־ 25 נקודות.

1. (א) (5 נקודות) בפרוייקט א' משקיעים 100 דולר בזמן 0 ומקבלים 22 דולר בסוף כל שנה ל-5 שנים.
בפרוייקט ב' משקיעים 100 דולר בזמן 0 ומקבלים 24 דולר בסוף כל שנה ל-5 שנים.
חשב את ה-NPV של שני הפרוייקטים בהנחת שער ריבית 5%.

(ב) (5 נקודות) בפרוייקט מסויים משקיעים A דולר בזמן 0 ומקבלים B דולר בסוף כל שנה ל-N שנים. איזו משוואה יש לפתור כדי למצוא את ה-IRR ? (אין צורך לפתור את המשוואה.)

(ג) (7 נקודות) אם x קטן (בערך מוחלט) $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. העזר בזה למצוא קירוב לפתרון של המשוואה שמצאת בסעיף הקודם, בהנחה שה-IRR הוא קטן.
הערה: יש דרכים שונות לפתור סעיף זה שמובילות לנוסחאות שונות! באחת הדרכים ניתן להסתדר עם הקירוב $e^x \approx 1 + x$.

(ד) (8 נקודות) על ידי שימוש בתוצאה של הסעיף הקודם, או על ידי חישוב ישיר, מצא קירובים ל-IRR'ים של פרוייקטים א' וב' מסעיף (א). אם משתמשים בתוצאה של הסעיף הקודם יש לבדוק שמקבלים תוצאה סבירה!

(א) לפרוייקט הראשון

$$\text{NPV} = -100 + 22(e^{-0.05} + e^{-0.1} + e^{-0.15} + e^{-0.2} + e^{-0.25}) \approx -5.085$$

לפרוייקט השני

$$\text{NPV} = -100 + 24(e^{-0.05} + e^{-0.1} + e^{-0.15} + e^{-0.2} + e^{-0.25}) \approx 3.543$$

אם מפרשים את שער הריבית כשער שנתית, אזי לפרוייקט הראשון

$$\text{NPV} = -100 + 22\left(\frac{1}{1.05} + \frac{1}{1.05^2} + \frac{1}{1.05^3} + \frac{1}{1.05^4} + \frac{1}{1.05^5}\right) \approx -4.752$$

ולפרוייקט השני

$$\text{NPV} = -100 + 24\left(\frac{1}{1.05} + \frac{1}{1.05^2} + \frac{1}{1.05^3} + \frac{1}{1.05^4} + \frac{1}{1.05^5}\right) \approx 3.907$$

(ב)

$$-A + B(e^{-r} + e^{-2r} + \ldots + e^{-Nr}) = 0$$

או, אם מסכמים את הסכום:

$$-A + Be^{-r}\frac{1 - e^{-Nr}}{1 - e^{-r}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B\frac{1 - e^{-Nr}}{e^r - 1}$$

אם עושים עם שער ריבית שנתית

$$-A + B\left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^N}\right) = 0$$

אם מסכמים:

$$-A + \frac{B}{1+r}\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^N}}{1 - \frac{1}{1+r}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{B}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)$$

(ג) אני אשתמש בנוסחה

$$A = B\frac{1-e^{-Nr}}{e^r-1} \approx B\frac{1-(1-Nr+\frac{1}{2}(Nr)^2)}{(1+r+\frac{1}{2}r^2)-1} = B\frac{N-\frac{1}{2}N^2r}{1+\frac{1}{2}r}$$

יש לפתור את זה למצוא את r:

$$\frac{A}{BN}\left(1+\frac{1}{2}r\right) \approx 1-\frac{1}{2}Nr \qquad \Leftrightarrow \quad r \approx \frac{2\left(1-\frac{A}{BN}\right)}{N+\frac{A}{BN}}$$

(ד) למקרה הראשון $A = 100$, $B = 22$, $N = 5$, קבלים

$$\text{IRR} \approx \frac{2}{65} \approx 3.08\%$$

למקרה השני $A = 100$, $B = 24$, $N = 5$, קבלים

$$\text{IRR} \approx \frac{2}{35} \approx 5.71\%$$

לבדוק האם התשובות הן סבירות יש לחשב את ה-NPV עם שערי ריבית אלה. לפרוייקט הראשון:

$$\text{NPV} = -100 + 22(e^{-0.0308} + e^{-0.0616} + e^{-0.924} + e^{-0.1232} + e^{-0.154}) \approx 0.387$$

לפרוייקט השני

$$\text{NPV} = -100 + 24(e^{-0.0571} + e^{-0.1142} + e^{-0.1713} + e^{-0.2284} + e^{-0.2855}) \approx 1.438$$

בסדר לקירוב ראשון, אבל בשני המקרים קצת נמוך. תשובות יותר מדוייקות: 3.21%, 6.02% .

---

2. בטבלה מופיעים שערי הריבית ה-spot באחוזים מאתר ה-Treasury להיום:

שנה	שנתיים	3 ש'	5 ש'	7 ש'	10 ש'
0.52	0.71	0.85	1.15	1.46	1.71

(א) (3 נקודות) איך היית עושה קירוב לשערים לתקופות של 4,6,8,9 שנים ?

(ב) (5 נקודות) מצא את ה-NPV ואת המשך (המח"ם) של אגרת חוב ל-10 שנה עם ערך נקוב 100 דולר וקופון שנתי 10 דולר. (יש להסתמך על התוצאות של הסעיף הקודם.)

(ג) (5 נקודות) הסבר בקצרה את החשיבות של המשך של אגרת חוב.

(ד) (12 נקודות) רוצים להמיר את האג"ח של סעיף (ב) לחוב שישלם A דולר אחרי X שנים ועוד A דולר בסוף 10 שנה (כאן X לא בהכרח שלם). רוצים למצוא את A ואת X כך שיש אותו NPV ואותו משך לחוב החדש כמו שיש לאג"ח. מצא זוג של משוואות שניתן לפתור אותן למצוא את A ואת X (אין צורך לפתור את המשוואות). האם לדעתך X הוא קטן מ- או גדול מ-5?

(א) על ידי אנטרפולציה לינארית:

שנה	שנתיים	3 ש'	4 ש'	5 ש'	6 ש'	7 ש'	8 ש'	9 ש'	10 ש'
0.52	0.71	0.85	1.00	1.15	1.30	1.46	1.54	1.63	1.71

(ב)

$$\text{NPV} = 100e^{-10\cdot 0.0171} + 10\left(e^{-1\cdot 0.52} + e^{-2\cdot 0.71} + \ldots + e^{-10\cdot 0.0171}\right) \approx 177.1$$

$$\text{D} = \frac{1}{\text{NPV}}\left(100\cdot 10e^{-10\cdot 0.0171} + 10\left(1e^{-1\cdot 0.52} + 2e^{-2\cdot 0.71} + \ldots + 10e^{-10\cdot 0.0171}\right)\right) \approx 7.57$$

(ג) המשך מאפשר לנו לתת אומדן של ההשפעה על שינויים בשערי הריבית על הערך הנוכחי של האג"ח. במקרה שלנו, אם שערי הריבית כולם יעלו, נגיד, באחוז אחד, ערך האג"ח ירד בערך ב-7.57%. (התשובה המדוייקת: 7.24%)

(ד) לחוב החדש יש לנו

$$\text{NPV} = A\left(e^{-Xr(X)} + e^{-10\cdot 0.0171}\right)$$

$$\text{D} = \frac{A}{\text{NPV}}\left(Xe^{-Xr(X)} + 10e^{-10\cdot 0.0171}\right)$$

כאן $r(X)$ מסמן את שער הריבית ל-X שנים, שיש למצוא מהטבלה (על ידי אנטרפולציה ליניארית כי מן הסתם X לא יהיה מספר שלם של שנים). ולכן אנחנו רוצים לבחור את A ואת X כך ש-

$$A\left(e^{-Xr(X)} + e^{-0.171}\right) = 177.1\ , \qquad \frac{Xe^{-Xr(X)} + 10e^{-0.171}}{e^{-Xr(X)} + e^{-0.171}} = 7.57$$

ניתן לכתוב את המשוואה השנייה בצורה

$$\begin{aligned} Xe^{-Xr(X)} + 10e^{-0.171} &= 7.57e^{-Xr(X)} + 7.57e^{-0.171} \\ \Leftrightarrow\quad 2.43e^{-0.171} &= (7.57 - X)e^{-Xr(X)} \\ \Leftrightarrow\quad 2.048 &= (7.57 - X)e^{-Xr(X)} \end{aligned}$$

בצד ימין יש פונקציה יורדת של X. כאשר מציבים $X = 5$ מקבלים 2.426, כאשר מציבים $X = 6$ מקלבים 1.452. ולכן הפתרון X הוא בין 5 ל-6.

---

3. לתשואות של שלושת הנכסים בשוק יש תוחלות

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$$

ומטריצת קו-וריאנצים

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(א) (7 נקודות) מצא את התיק עם שונות מינימלית. מצא את ההרכב של התיק, את התוחלת ואת השונות של התשואה שלו.

(ב) (7 נקודות) מצא עוד תיק יעיל. מצא את ההרכב של התיק, את התוחלת ואת השונות של התשואה שלו.

(ג) (11 נקודות) תאר את הקבוצה של התיקים היעילים שניתן לבנות ללא צורך במכירה בחסר. מהי תוחלת התשואה המקסימלית לתיק כזה?

(א) מוצאים את הנקודה של שונות מינימלית על ידי שפותרים את $\Omega\mathbf{w} = \mathbf{e}$ כאשר Ω היא המטריצה של קו-וריאנצים ו-$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. אחר כך מנרמלים את $\mathbf{w}$ כך שסכום הרכיבים שווה 1. מקבלים תשובה $\mathbf{w} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
תוחלת תשואה $\mathbf{w}^T\mu = \frac{2}{15}$ או $\frac{7}{45}$ למי שלקח את התשואות בסדר הפוך. שונות $\mathbf{w}^T\Omega\mathbf{w} = \frac{7}{6}$.

(ב) אפשר לפתור את $\Omega\mathbf{w}=\mu$ ולנרמל לקבל $\mathbf{w}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}5\\8\\11\end{pmatrix}$. תוחלת התשואה: $\frac{11}{72}$ ושונות $\frac{385}{288}$.

תשובות אם לוקחים את התשואות בסדר הפוך: $\mathbf{w}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$. עם תוחלת $\frac{11}{60}$ ושונות $\frac{11}{8}$.

(ג) לפי משפט שני התיקים, כל תיק יעיל הוא צירוף לינארי של שני התיקים שמצאנו. אנחנו רוצים תיק יעיל, שיש לו תוחלת תשואה מעל זו של התיק עם שונות מינימלית, ולכן אם נסמן את התוצאות של סעיפים (א) ו-(ב) על ידי $\mathbf{w}_1$ ו- $\mathbf{w}_2$ בהתאם, יש לקחת $\mathbf{w}=\alpha\mathbf{w}_1+(1-\alpha)\mathbf{w}_2$ כאשר $\alpha\le 1$ - כי תוחלת התשואה של התיק השני הוא יותר מזו של התיק הראשון. ולכן יש לנו

$$\mathbf{w}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}5+7\alpha\\8\\11-7\alpha\end{pmatrix}$$

שלא יהיה מכירה בחסר של נכס כלשהוא יש לקחת $\frac{11}{7}\ge\alpha\ge-\frac{5}{7}$ ולכן סה"כ יש לנו את ההגבלה $1\ge\alpha\ge-\frac{5}{7}$. תוחלת התשואה היא $\alpha\frac{2}{15}+(1-\alpha)\frac{11}{72}=\frac{11}{72}-\frac{7}{360}\alpha$. ולכן לעשות את תוחלת התשואה כמה שאפשר יותר גדול יש לקחת $\alpha=-\frac{5}{7}$ וזה יתן תשואה $\frac{1}{6}$. בתיק הזה יש $\frac{1}{3}$ בנכס השני ו- $\frac{2}{3}$ בנכס השלישי ואין השקעה בנכס הראשון שיש לו תוחלת תשואה נמוכה יותר.

---

4. (א) (10 נקודות) טוענים שיש 3 מצבים אפשריים לעולם, שלושתם בעלי הסתברות $\frac{1}{3}$. ב-3 המצבים התשואות של נכס מסויים הן $-30\%,+15\%,+20\%$ והתשואות של השוק הן $-20\%,+5\%,+15\%$ בהתאם. חשב את התוחלת ואת השונות של התשואה של הנכס ושל התשואה של השוק, ואת הקו-ווריאנץ שלהם. הראה שמצב זה אינו תואם מודל CAPM אלא אם כן שער הריבית חסר סיכון הוא $r_f\approx-3.33\%$.

(ב) (10 נקודות) בעולם עם רק שני נכסים עם סיכון טוענים שיש 3 מצבים אפשריים לעולם, שלושתם בעלי הסתברות $\frac{1}{3}$. ב-3 המצבים התשואות של הנכס הראשון הם $-30\%,+15\%,+20\%$ והתשואות של הנכס השני הם $-10\%,-5\%,+10\%$ בהתאם. חשב את התוחלת ואת השונות של התשואות של שני הנכסים, ואת הקו-ווריאנץ שלהם. מצא את התשואה של תיק השוק בהנחה שמודל CAPM קיים עם שער ריבית חסר סיכון כלשהוא r_f.

(ג) (5 נקודות) הסבר למה המצב המתואר בסעיף (ב) מסתדר עם מודל CAPM לכל ערך של r_f אבל המצב בסעיף (א) מסתדר רק לערך ספציפי של r_f.

(א)

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{10}+\frac{3}{20}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{60}\\
\mu_M &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{3}{20}\right)=0\\
\sigma_1^2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{100}+\frac{9}{400}+\frac{1}{25}\right)-\frac{1}{60^2}=\frac{91}{1800}\\
\sigma_M^2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{400}+\frac{9}{400}\right)=\frac{13}{600}\\
\sigma_{1M} &= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{50}+\frac{3}{400}+\frac{3}{100}\right)=\frac{13}{400}
\end{aligned}$$

אנחנו רואים ש- $\beta_1=\frac{\sigma_{1M}}{\sigma_M^2}=\frac{3}{2}$ ולכן CAPM דורש ש-

$$\mu_1-r_f=\beta_1(\mu_M-r_f)\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{60}-r_f=-\frac{3}{2}r_f$$

לכן $r_f=-\frac{1}{30}$

(ב)

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{10}+\frac{3}{20}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{60}\\
\mu_2 &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{10}-\frac{1}{20}+\frac{1}{10}\right)=-\frac{1}{60}\\
\sigma_1^2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{100}+\frac{9}{400}+\frac{1}{25}\right)-\frac{1}{60^2}=\frac{91}{1800}\\
\sigma_2^2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{400}+\frac{1}{100}\right)-\frac{1}{60^2}=\frac{13}{1800}\\
\sigma_{12} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{50}-\frac{3}{400}+\frac{3}{100}\right)+\frac{1}{60^2}=\frac{13}{900}
\end{aligned}$$

לפי דף הנוסחאות ניתן למצוא את המשקלות של תיק השוק על ידי נירמול של

$$\begin{aligned}
& K\begin{pmatrix} \frac{91}{1800} & \frac{13}{900} \\ \frac{13}{900} & \frac{13}{1800} \end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{60} \\ -\frac{1}{60} \end{pmatrix} - r_f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\\
= \;& K'\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1-60r_f \\ -1-60r_f \end{pmatrix}\\
= \;& K''\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-60r_f \\ -1-60r_f \end{pmatrix}\\
= \;& K''\begin{pmatrix} 3+60r_f \\ -9-300r_f \end{pmatrix}\\
= \;& \frac{1}{2+80r_f}\begin{pmatrix} -(1+20r_f) \\ 3+100r_f \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

בשורה אחרונה בחרתי את המקדם K'' כך שסכום המשקלות שווה 1.
תשואת השוק:

$$\frac{1}{2+80r_f}\left(-\frac{1}{60}\left(1+20r_f\right)-\frac{1}{60}\left(3+100r_f\right)\right)=-\frac{1+30r_f}{30(1+40r_f)}$$

(ג) יש הרבה דרכים לענות על זה. בסעיף הראשון יש יותר מדי אנפרומציה - אם יודעים תוחלת תשואת השוק והקו-ווריאנץ של התשואה של נכס מסויים עם השוק אזי ניתן לקבוע את תוחלת התשואה של הנכס. ולכן רק במקרה של r_f ספציפי הנתונים "מסתדרים". בסעיף השני אנחנו לא יודעים על השוק. נכון שאנחנו יודעים את הכל על התשואות של שני הנכסים, היות ואנחנו לא יודעים את המשקל של כל אחד בשוק, אנחנו לא יודעים להסיק את תשואת השוק. בפועל מה שיקרה הוא שהמחירים של הנכסים יסתדרו בהתאם לערך של r_f לייצור "שוק" מותאם לנתונים.

---

5. תזכורות: ל- c קטן בערך מוחלט

$$\begin{aligned}
e^c &\approx 1+c+\frac{1}{2}c^2\\
\ln(1+c) &\approx c-\frac{1}{2}c^2
\end{aligned}$$

(א) (7 נקודות) אם $U(x)=-e^{-\alpha x}$ כאשר α הוא מספר חיובי קטן, הוכח שפרמיית הסיכון $\pi(X)$ מקיימת

$$\pi(X)\approx\frac{1}{2}\alpha\mathrm{Var}(X)$$

אין להסתמך על תוצאה כלשהיא מההרצאות, יש להוכיח באופן מלא.

(ב) (8 נקודות) אם $U(x) = -e^{-\alpha x}$ כאשר α הוא מספר חיובי, ו- X, Y הם בלתי תלויים, הוכח ש-

$$\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y)$$

(ג) (10 נקודות) הוכח שבאופן כללי, לפונקציית תועלת קעורה כללית $U(x)$, לא בהכרח מתקיים

$$\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y)$$

למשתנים מקריים בלתי תלויים X, Y. מומלץ לנסות למצוא דוגמת נגד.

(א) יש הרבה דרכים לפתור. החל מההגדרה של $\pi(X)$:

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{E}[X] - \pi(X)) &= \mathbf{E}[U(X)] \\
\Leftrightarrow e^{-\alpha(\mathbf{E}[X]-\pi(X))} &= \mathbf{E}[e^{-\alpha X}] \\
\Leftrightarrow e^{\alpha\pi(X)} &= \mathbf{E}[e^{-\alpha(X-\mathbf{E}[X])}] \\
\Leftrightarrow \pi(X) &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(\mathbf{E}[e^{-\alpha(X-\mathbf{E}[X])}]\right) \\
&\approx \frac{1}{\alpha}\ln\left(\mathbf{E}[1-\alpha(X-\mathbf{E}[X]) + \frac{1}{2}\alpha^2(X-\mathbf{E}[X])^2]\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2\mathrm{Var}(X)\right) \\
&\approx \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{2}\alpha^2\mathrm{Var}(X) \\
&= \frac{1}{2}\alpha\mathrm{Var}(X)
\end{aligned}$$

(ב) אם $U(x) = -e^{-\alpha X}$ אזי

$$U(X+Y) = -e^{-\alpha(X+Y)} = -e^{-\alpha X}e^{-\alpha Y} = -U(X)U(Y)$$

ולכן אם בנוסף X, Y ב"ת יש לנו

$$\begin{aligned}
U\left(\mathbf{E}[X+Y] - \pi(X+Y)\right) &= \mathbf{E}[U(X+Y)] \\
&= -\mathbf{E}[U(X)U(Y)] \\
&= -\mathbf{E}[U(X)]\mathbf{E}[U(Y)] \\
&= -U(\mathbf{E}[X]-\pi(X))\cdot U(\mathbf{E}[Y]-\pi(Y))
\end{aligned}$$

ולכן

$$-e^{-\alpha(E[X+Y]-\pi(X+Y))} = -e^{-\alpha(E[X]-\pi(X)}e^{-\alpha(E[Y]-\pi(Y))}$$

ולכן $\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y)$.

(ג) אנחנו רוצים להפריך את הטענה שאם X, Y ב"ת אזי תמיד (כלומר, לכל בחירה של פונקציית תועלת U)

$$\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y)$$

אפשר לעשות את זה, לדוגמה, על ידי שמסתכלים על המקרה של פונקציית תועלת $U(x) = \sqrt{x}$. במקרה זה יש לנו ש-

$$U(\mathbf{E}[X]-\pi(X)) = \mathbf{E}[U(X)] \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\mathbf{E}[X]-\pi(X)} = \mathbf{E}[\sqrt{X}]$$

ולכן

$$\pi(X) = \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[\sqrt{X}]^2 = \mathrm{Var}(\sqrt{X})$$

האם נכון שאם X,Y ב"תים אזי

$$\mathrm{Var}(\sqrt{X+Y}) = \mathrm{Var}(\sqrt{X}) + \mathrm{Var}(\sqrt{Y}) \ ?$$

אפשר בקלות להשתכנע שלא. לדוגמה אם X,Y מ"מ ברנולי שמקבלים את הערכים 0 ו-1, כל אחד בהסתברות $\frac{1}{2}$, אזי $\sqrt{X}=X$, $\sqrt{Y}=Y$ ו- $\mathrm{Var}(\sqrt{X}) = \mathrm{Var}(\sqrt{Y}) = \frac{1}{4}$. אבל

$$\sqrt{X+Y} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{cases}$$

עם הסתברויות $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ בהתאם, ולמשתנה מקרי זה יש תוחלת $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}$ ושונות $1-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}$ שזה שונה מ- $\frac{1}{2}$.
