בס"ד

<u>מתמטיקה פיננסית 1, 88-620, פרופ' ג'רמי שיף</u>
<u>מבחן מועד ב', סמסטר א', תשע"ו</u>

משך המבחן: 3 שעות
כל חומר עזר אסור מלבד מחשבון ודף הנוסחאות המצורף.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. תשובה נכונה, מפורטת, מנומקת ומלאה לכל שאלה תזכה ב־ 25 נקודות.

1. (א) (8 נקודות) בפרוייקט מסויים משקיעים 100 ש"ח עכשיו, מקבלים 210 ש"ח אחרי שנה אחת, ויש צורך לשלם עוד 100 ש"ח בסוף שנתיים (מהיום). מנהל אחד טוען שזה לא כדאי, כי ה-IRR של הפרוייקט הוא -27% לשנה. מנהל שני טוען שזה כן כדאי, כי ה-IRR הוא 37% לשנה. מי צודק ? מומלץ, בתשובתך, גם להתייחס ל-NPV של הפרוייקט לפי שער ריבית 1.60% (ריבית הפריים היום).

   (ב) (6 נקודות) מצא נוסחה מפורשת לערכי ה-IRR של פרוייקט שבו משקיעים A ש"ח עכשיו, מקבלים B ש"ח אחרי שנה אחת, ויש צורך לשלם עוד A ש"ח בסוף שנתיים (מהיום). יש להניח ש- $B > 2A$. רמז: משוואה ריבועית.

   (ג) (11 נקודות) בפקוייקט אחר, משקיעים 100 ש"ח עכשיו, מקבלים תשלומים 10 ש"ח (כל אחד) בסוף חודשים $2, 3, \ldots, 22$, ובסוף שנתיים (מהיום) יש צורך לשלם עוד 100 ש"ח. מצא משוואה שיש לפתור כדי למצוא את ה-IRR. (יש לכתוב את המשוואה בצורה הפשוטה ביותר ובין היתר יש לסכם את הסכום הרלוונטי.) העזר בדמיון לפרוייקט המתואר בסעיף א' למצוא קירובים ראשונים לערכי ה-IRR, ותאר איך ניתן לשפר אותם.

2. (א) (6 נקודות) לאג"ח 5 שנים, עם ערך נקוב 100 וקופון שנתי c, מצא נוסחאות ל-NPV ולמשך (כפונקציות של c), בהנחת שער ריבית שנתית קבוע 1.6%. *בסעיפים הבאים נסמן את התוצאות של סעיף זה:* $NPV_1(c), D_1(c)$.

   (ב) (4 נקודות) האם $NPV_1(c)$ ו- $D_1(c)$ עולות או יורדות כפונקציות של c? נמק!

   (ג) (5 נקודות) לאג"ח 5 שנים, עם ערך נקוב 100 וקופון שנתי c, מצא נוסחא ל-NPV בהנחת שערי ריבית spot לתקופות של $1, 2, 3, 4, 5$ שנים כדלהן: $1.6\%, 2.2\%, 2.8\%, 3.4\%, 4\%$. *בסעיף הבא נסמן את התוצאה של סעיף זה* $NPV_2(c)$.

   (ד) (10 נקודות) מציעים את הנוסחא

$$P(c) = NPV_1(c)(1 - 0.021 D_1(c))$$

כמחיר של האג"חים מתוארים בסעיף (א). הסבר (במילים) למה נוסחא זו לוקחת בחשבון גם את הערך הנוכחי של האג"ח וגם את הסיכון של שינוי בשערי הריבית. הראה שאם $0 \le c \le 10$ אזי $|P(c) - NPV_2(c)| < 1$. מאיפה, לדעתך, הגיע המקדם 0.021 בנוסחא ?

3. קיימים שלושה נכסים עם סיכון. ווקטור התוחלות של התשואות ומטריצת הקו-ווריאנצים של התשואות הם

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.03 \\ 0.06 \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

שער הריבית חסר הסיכון הוא $r_f = 0.01$.

   (א) (8 נקודות) מצא את התיק היעיל של הנכסים עם סיכון.

   (ב) (9 נקודות) מצא את השונות של תיק יעיל עם תשואה 0.04.

   (ג) (8 נקודות) בהנחת CAPM , מהו ה-β של הנכס הראשון? מצא את האחוז של השונות של הנכס הראשון שהוא סיסטמי ואת האחוז שאינו סיסטמטי.

4. לתשואה של תיק, שהוא צירוף לינארי של נכס חסר סיכון ותיק השוק, יש תוחלת 25% וסטיית תקן 4%. שער הריבית חסר הסיכון הוא 5% ותוחלת התשואה של תיק השוק הוא 20%. לנייר ערך מסויים יש מקדם מתאם 0.5 עם השוק וסטיית תקן 2%.

(א) (9 נקודות) מצא את תוחלת התשואה של נייר הערך (בהנחה שהשוק מתנהג לפי CAPM).

(ב) (4 נקודות) איזה אחוז של השונות של התשואה של נייר הערך הוא סיסטמי, ואיזה אחוז לא-סיסטמי?

(ג) (4 נקודות) מצא את יחס השרפ של נייר הערך ואת יחס השרפ של השוק.

(ד) (8 נקודות) אם ידוע שבשוק יש רק שני ניירות ערך, ולנייר השני יש תוחלת תשואה 30%, מצא את מקדם המתאם של התשואות של שני הניירות.

5. למשקיע עם הון W יש פונקציית תועלת $U(x) = -e^{-\lambda x}$ כאשר λ הוא קבוע חיובי.

(א) (6 נקודות) חשב את פונקציית הסיכון המוחלט של Arrow-Pratt של המשקיע.
האם כמות הכסף שהמשקיע ירצה להשקיע בהשקעה מסוכנת עולה או יורדת כפונקצייה של λ?
וכפונקצייה של W?

(ב) (6 נקודות) עומדים לפני המשקיע שני ערוצי השקעה: הראשון משלם תשואה קבועה $r_f > 0$, השני משלם תשואה r שהיא משתנה מקרי המתפלג אחיד בקטע $[a, b]$, כאשר $a < r_f < b$. אם המשקיע משקיע סכום p בערוץ עם תשואה משתנה וסכום $(W - p)$ בערוץ עם תשואה קבועה, מצא את תוחלת התועלת שלו בסוף תקופת ההשקעה.
תזכורת: אם למשתנה המקרי הרציף X יש צפיפות $f(x)$ אזי לכל פונקציה $g(X)$ בעלת תוחלת סופית

$$\mathbf{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \ .$$

(ג) (10 נקודות) על סמך התוצאה של הסעיף הקודם, הוכח שכדי לקבל תוחלת תועלת מירבית יש למשקיע לבחור $p = \frac{C}{\lambda}$ כאשר C הוא פתרון המשוואה

$$e^{-(b-a)C} = \frac{1 - (r_f - a)C}{1 + (b - r_f)C}$$

(ד) (3 נקודות) האם המסקנה של הסעיף הקודם נכונה גם כאשר $\frac{C}{\lambda} > W$?

בהצלחה!

בס"ד

דף נוסחאות עיקריות

ריבית קבועה: NPV של סדרה של תשלומים a_i בזמנים t_i ($a_i > 0$ הכנסה, $a_i < 0$ הוצאה). להרכבה רציפה (מועדף)

$$\text{NPV} = \sum_i a_i e^{-rt_i}$$

לרכבה שנתית:

$$\text{NPV} = \sum_i \frac{a_i}{(1+r)_i^t}$$

משך:

$$D = \frac{1}{\text{NPV}} \sum_i a_i t_i e^{-rt_i}$$

לאג"ח סטנדרטי ערך נקוב 1, קופון שנתי $100y\%$, לתקופת N שנים

$$\text{NPV} = y\frac{1-e^{-rN}}{e^r - 1} + e^{-rN}$$

$$D = \frac{y\frac{e^{rN}-1}{1-e^{-r}} + N(e^r - 1 - y)}{ye^{rN} + (e^r - 1 - y)}$$

אם מצרפים x יחידות של נכס 1 ו-y יחידות של נכס 2:

$$\text{NPV} = x\text{NPV}_1 + y\text{NPV}_2\ , \qquad D = \frac{x\text{NPV}_1 D_1 + y\text{NPV}_2 D_2}{NPV}$$

רגישות לשער הריבית

$$\frac{d\text{NPV}(r)}{dr} = -D(r)\text{NPV}(r)$$

ריבית משתנה: שערי spot $s(t)$

$$\text{NPV} = \sum_i a_i e^{-s(t_i)t_i}\ , \quad D = \frac{1}{\text{NPV}} \sum_i a_i t_i e^{-s(t_i)t_i}$$

שער forward מזמן t_1 עד זמן t_2:

$$f(t_1, t_2) = \frac{t_2 s(t_2) - t_1 s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$r(t) = f(t, t+1)$: short rates

תורת תוחלת-שונות. r_i (משתנה מקרי) תשואה של נכס i, $\mu_i = \mathbf{E}[r_i]$, $\sigma_i^2 = \text{Var}(r_i)$, $\sigma_{ij} = \text{cov}(r_i, r_j)$. תיק: משקלות w_i, $\sum_i w_i = 1$, תשואה $r = \sum w_i r_i$. שונות $\sum w_i w_j \sigma_{ij}$. בעיית מרקוביץ. לשונות מינימלית עם תוחלת תשואה נתונה μ יש לדרוש

$$\sum \sigma_{ij} w_j - \lambda_1 \mu_i - \lambda_2 = 0\ , \quad \sum w_i \mu_i = \mu\ , \quad \sum w_i = 1$$

עבור λ_1, λ_2 כלשהם. לנקודת שונות מינימלית יש לקחת $\lambda_1 = 0$. הנקודות הקשורות במישור (σ, μ) הם בהיפרבולה

$$\sigma^2 = \frac{a\mu^2 - 2b\mu + c}{ac - b^2}$$

$$a = \mathbf{e}^T \Omega^{-1} \mathbf{e}\ , \quad b = \mathbf{m}^T \Omega^{-1} \mathbf{e}\ , \quad b = \mathbf{m}^T \Omega^{-1} \mathbf{m}$$

($\mathbf{e}$ ווקטור של 1'ים, $\mathbf{m}$ ווקטור של תוחלות תשואות, Ω מטריצה של קו-ווריאנצים.)

תיק השוק במשפט קרן אחת:

$$w = K\Omega^{-1}(\mathbf{m} - r_f \mathbf{e})$$

במקרה של רק שני נכסים עם סיכון. בנקודת השונות המינימלית

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}\ , \qquad w_2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

CAPM . קו שוק ההון: היחס במישור (σ,μ) לתיקים יעילים

$$\mu - r_f = \sigma \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$$

השיפוע מייצג את העלות של סיכון. מודל CAPM - תוחלת התשואה של כל נכס מקיימת

$$\mu_i - r_f = \beta_i(\mu_M - r_f)\ , \qquad \beta_i = \frac{\sigma_{Mi}}{\sigma_M^2}$$

סיכון סיסטמי וסיכון לא-סיסטמי:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \mathrm{Var}(e_i)$$

אלפא של ג'נסן:

$$\overline{r_i} - r_f = \beta_i(\mu_M - r_f) + \alpha_i$$

יחס שרפ של נכס הוא $\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}$. יש להשוות מול יחס שרפ של השוק $\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$.
CAPM כנוסחת תמחור: אם התשלום בסוף של הנכס הוא Q אז המחיר שלו P אמור לקיים

$$P = \frac{\mathbf{E}[Q]}{1 + r_f + \beta(\mu_M - r_f)} = \frac{\mathbf{E}[Q] - \mathrm{cov}(Q, r_M)\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2}}{1 + r_f}$$

מודלים עם פקטורים וחוסר ארביטראז'. מודל עם פקטורים

$$r_i = a_i + \sum_j b_{ij} f_j + e_i$$

הפקטורים f_j, $\mathbf{E}[f_j] = 0$, $A_{jk} = \mathrm{cov}(f_j, f_k)$.
השגיאות e_i, $\mathbf{E}[e_i] = 0$, $\mathrm{cov}(e_i, f_j) = 0$, $G_{il} = \mathrm{cov}(e_i, e_l)$.
$a_i = \mathbf{E}[r_i]$.
חישוב המקדמים b_{ij}: $\mathrm{cov}(r_i, f_k) = \sum_j b_{ij} A_{jk}$
פירוק השונות

$$\mathrm{Var}(r_i) = \mathrm{Var}\left(\sum_j b_{ij} f_j\right) + \mathrm{Var}(e_i)$$

תמחור לינארי:

$$a_i = \lambda_0 + \sum_j b_{ij} \lambda_j$$

λ_j הוא מחיר הסיכון של פקטור j. משפט חוסר ארביטראז': במודל עם פקטורים עם $||G||_2$ סופי, אם אין ארביטראז' אסימפטוטי אזי יש תמחור לינארי עד לשגיאה עם נורמה סופית.

תורת התועלת: משפט ג'נסן לפונקצייה קמורה f: $\mathbf{E}[f(X)] \geq f\left(\mathbf{E}[X]\right)$.
שווי ואדאי C של תקבול X שהוא משתנה מקרי: $U(C) = \mathbf{E}[U(X)]$.
פרמיית סיכון: $\pi(X) = \mathbf{E}[X] - C$ כלומר

$$U\left(\mathbf{E}[X] - \pi(X)\right) = \mathbf{E}[U(X)]$$

פונקציית שנאת הסיכון המוחלט של Arrow-Pratt: $A(x) = -U''(x)/U'(x)$. פונקציית שנאת הסיכון היחסי: $xA(x)$.
משפט Pratt : שלושת הדברים הבאים הם שקולים: 1) $\pi_1(X) > \pi_2(X)$ לכל משתנה מקרי לא טריביאלי X.
2) $A_1(x) > A_2(x)$ לכל x. 3) $U_1(x) = G(U_2(x))$ כאשר G היא פונקצייה קעורה.
בעיית בחירת תיק. n נכסים, מחירים $P_1, \ldots, P_n$, תשלומים בסוף $Q_1, \ldots, Q_n$ (משתנים מקרים). קונים θ_i יחידות של נכס i. יש לבחור את θ_i כך ש-

$$\mathbf{E}\left[U'\left(\sum_i \theta_i Q_i\right) Q_i\right] = \lambda P_i\ , \qquad \sum \theta_i P_i = W$$

כאשר W מייצג את ההון הכולל של המשקיע. המקרה של $U(x) = \ln(x)$ - "log optimal pricing":

$$P_i = \mathbf{E}\left[\frac{Q_i}{R^*}\right]$$

כאשר R^* מסמן את התשואה של התיק האופטימלי.