פיננסית 1- תשע"ו

תרגיל 2 - פתרון

1. נשתמש בנוסחא $f_{m,n}=\left(\frac{(1+r_n)^n}{(1+r_m)^m}\right)^{\frac{1}{n-m}}-1$

(א)
$$f_{0,1}^{(30.1.15)}=r_1=0.34\%$$
$$f_{1,2}^{(30.1.15)}=\left(\frac{(1+0.0075)^2}{(1+0.0034)^1}\right)^{\frac{1}{2-1}}-1=1.16\%$$
$$f_{2,3}^{(30.1.15)}=\left(\frac{(1+0.0105)^3}{(1+0.0075)^2}\right)^{\frac{1}{3-2}}-1=1.65\%$$
$$f_{0,1}^{(30.1.05)}=r_1=4.31\%$$
$$f_{1,2}^{(30.1.05)}=\left(\frac{(1+0.0440)^2}{(1+0.0431)^1}\right)^{\frac{1}{2-1}}-1=4.49\%$$
$$f_{2,3}^{(30.1.05)}=\left(\frac{(1+0.0441)^3}{(1+0.0440)^2}\right)^{\frac{1}{3-2}}-1=4.43\%$$

(ב) בכדי לחשב את שערי ה־forward בקפיצות של שנה, יש צורך לדעת את שערי ה־spotהשנתיים כך לא כולם נתונים לי! לכן עבור השנים שלא נתונים השערי ריבית נבצע קירוב לנארי (אינטרפולציה לינארית) ונקבל ששערי ה־spot יהיו:

תאריך	שנה	שנתיים	3 ש	4 ש	5 ש	6 ש	7 ש	8 ש	9 ש	10 ש
30.10.15	0.34	0.75	1.05	**1.285**	1.52	**1.7**	1.88	**1.97**	**2.06**	2.16
30.10.05	4.31	4.40	4.41	**4.43**	4.45	**4.47**	4.49	**4.51**	**4.54**	4.57

וכעת אפשר לחשב את ה־forward השנתיים.

$$f_{3,4}^{(30.1.15)}=\left(\frac{(1+0.01285)^4}{(1+0.0105)^3}\right)^{\frac{1}{4-3}}-1=1.99\%$$
$$f_{4,5}^{(30.1.15)}=\left(\frac{(1+0.0152)^5}{(1+0.01285)^4}\right)^{\frac{1}{5-4}}-1=2.47\%$$
$$f_{5,6}^{(30.1.15)}=\left(\frac{(1+0.017)^6}{(1+0.0152)^5}\right)^{\frac{1}{6-5}}-1=2.6\%$$
$$f_{6,7}^{(30.1.15)}=\left(\frac{(1+0.0188)^7}{(1+0.017)^6}\right)^{\frac{1}{7-6}}-1=2.97\%$$

$$f_{7,8}^{(30.1.15)} = \left(\frac{(1+0.0197)^8}{(1+0.0188)^7}\right)^{\frac{1}{8-7}} - 1 = 2.6\%$$

$$f_{8,9}^{(30.1.15)} = \left(\frac{(1+0.0206)^9}{(1+0.0197)^8}\right)^{\frac{1}{9-8}} - 1 = 2.78\%$$

$$f_{9,10}^{(30.1.15)} = \left(\frac{(1+0.0216)^{10}}{(1+0.0206)^9}\right)^{\frac{1}{10-9}} - 1 = 3.06\%$$

$$f_{3,4}^{(30.1.05)} = \left(\frac{(1+0.0443)^4}{(1+0.0441)^3}\right)^{\frac{1}{4-3}} - 1 = 4.49\%$$

$$f_{4,5}^{(30.1.05)} = \left(\frac{(1+0.0445)^5}{(1+0.0443)^4}\right)^{\frac{1}{5-4}} - 1 = 4.53\%$$

$$f_{5,6}^{(30.1.05)} = \left(\frac{(1+0.0447)^6}{(1+0.0445)^5}\right)^{\frac{1}{6-5}} - 1 = 4.57\%$$

$$f_{6,7}^{(30.1.05)} = \left(\frac{(1+0.0449)^7}{(1+0.0447)^6}\right)^{\frac{1}{7-6}} - 1 = 4.61\%$$

$$f_{7,8}^{(30.1.05)} = \left(\frac{(1+0.0451)^8}{(1+0.0449)^7}\right)^{\frac{1}{8-7}} - 1 = 4.65\%$$

$$f_{8,9}^{(30.1.05)} = \left(\frac{(1+0.0454)^9}{(1+0.0451)^8}\right)^{\frac{1}{9-8}} - 1 = 4.78\%$$

$$f_{9,10}^{(30.1.05)} = \left(\frac{(1+0.0457)^{10}}{(1+0.0454)^9}\right)^{\frac{1}{10-9}} - 1 = 4.84\%$$

(ג) נניח שהערך הנקוב של האגח הינו 100 אז מחירו של האגח יהיה

$$P = \sum_{i=1}^{10} 5 \cdot \frac{1}{(1+r_i)^i} + \frac{100}{(1+r_{10})^{10}}$$

לכן נקבל ש־

$$P^{(30.1.15)} = 126.28$$

$$P^{(30.1.05)} = 103.54$$

שימו לב בשאלה הזאת בוצע קירוב על ידי אינטרפולציה לנארית, יכלתם לחשוב על קירוב שונה, ולכן יתכן שהתוצאות המספריות היו שונות, אבל השוני לא אמור להיות גדול.

2. אגח A מקיים את המשוואה

$$110.02 = 5\tfrac{1}{(1+r_1)^1} + 5\tfrac{1}{(1+r_2)^2} + 105\tfrac{1}{(1+r_3)^3}$$

אגח B מקיים את המשוואה

$$118.67 = 8\tfrac{1}{(1+r_1)^1} + 8\tfrac{1}{(1+r_2)^2} + 108\tfrac{1}{(1+r_3)^3}$$

אגח C מקיים את המשוואה

$$116.39 = 57\tfrac{1}{(1+r_1)^1} + 7\tfrac{1}{(1+r_2)^2} + 57\tfrac{1}{(1+r_3)^3}$$

נסמן $x = \frac{1}{(1+r_1)^1},\ y = \frac{1}{(1+r_1)^2},\ z = \frac{1}{(1+r_1)^3}$ ונקבל את מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} 110.02 = 5x + 5y + 105z \\ 118.67 = 8x + 8y + 108z \\ 116.39 = 57x + 7y + 57z \end{cases}$$

שפתרונה $x = 0.9681,\ y = 0.9592,\ z = 0.9560$ לכן

$$r_1 = \frac{1}{x} - 1 = 0.0330$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{y}} - 1 = 0.0210$$

$$r_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{z}} - 1 = 0.0151$$

3. ביצענו שאלה דומה בכיתה:

בעזרת הנתונים של באגחים אפשר להגיע למשוואות

$$143.7 = \sum_{i=0}^{10} \frac{6.5}{(1+r_i)^i} + \frac{106.5}{(1+r_{11})^{11}}$$

$$141.7 = \sum_{i=0}^{10} \frac{6.125}{(1+r_i)^i} + \frac{6.125}{(1+r_{11})^{11}} + \frac{106.125}{(1+r_{12})^{12}}$$

נרצה לבטל את $r_1, ..., r_{10}$ לכן נכפול את המשוואה הראשונה ב־ 6.125 ואת השנייה ב־6.5 ונחסר

$$143.7 \cdot 6.125 - 141.7 \cdot 6.5 = (106.5 \cdot 6.125 - 6.125 \cdot 6.5)\frac{1}{(1+r_{11})^{11}} - 6.5 \cdot \frac{106.125}{(1+r_{12})^{12}}$$

$$-40.88 = \frac{612.5}{(1+r_{11})^{11}} - \frac{689.81}{(1+r_{12})^{12}}$$

כעת נישם את ההנחה ש־$r_{11} = r_{12}$ ונקבל את המשוואה $-40.88 = \frac{612.5}{(1+r_{11})^{11}} - \frac{689.81}{(1+r_{11})^{12}}$ אותה אנחנו יודעים לפתור, בעזרת חיפוש בינארי נקבל ש־$r_{11} = 0.0305 = 3.05\%$

4. לפי הנוסחא הרציפה של forward מתקיים $e^{s(t_2)t_2} = e^{s(t_1)t_1} e^{f(t_1,t_2)(t_2-t_1)}$

כלומר $f(t_1,t_2) = \frac{s(t_2)\, t_2 - s(t_1)\, t_1}{t_2 - t_1}$, לכן $r(t) = \lim_{t\to t_1} f(t,t_1) = \lim_{t\to t_1} \frac{s(t)\, t - s(t_1)\, t_1}{t - t_1} = (s(t)\, t)' = s(t) + s'(t)\, t$

ואם נוציא אינטגרל נקבל ש־ $s(t)\, t = \int_0^t r(t')\, dt' + c$ כלומר $s(t) = s(0) + \frac{1}{t} \int_0^t r(t')\, dt'$

5. $PV = C \sum_{i=1}^{5} e^{-r(t_i)t_i} + 1 \cdot e^{-r(5)\cdot 5} = c\left(e^{-0.003} + e^{-2\cdot 0.0075} + e^{-3\cdot 0.01} + e^{-4\cdot 0.0125} + e^{-5\cdot 0.015}\right) + e^{-5\cdot 0.015} = 4.8342 \cdot C + 0.9277$

ככול שהקופון יותר גדול (C) יש משקל יותר גדול על הקופונים הראשונים ולכן המשך ($duration$) יהיה קטן יותר.

עבור C מספיק גדול ניתן לזנוח את ההשפעה של הערך הנקוב כל המשך, ולכן

$$D = \frac{C\left(1e^{-0.003} + 2e^{-2\cdot 0.0075} + 3e^{-3\cdot 0.01} + 4e^{-4\cdot 0.0125} + 5e^{-5\cdot 0.015}\right)}{4.8342 \cdot C} = \frac{14.32}{4.834} = 2.96 < 3$$

אם נדרוש ש־$D = 4.5$ נקבל משוואה אחת

$$4.5 = \frac{C\left(1e^{-0.003} + 2e^{-2\cdot 0.0075} + 3e^{-3\cdot 0.01} + 4e^{-4\cdot 0.0125} + 5e^{-5\cdot 0.015}\right) + 5e^{-5\cdot 0.015}}{4.8342 \cdot C + 0.9277}$$

נבודד את C ונקבל ש־$C = 0.06$.

עבור $C = 0.05$ נקבל ש־$PV = 1.1687$ ו־$D = 4.587$וכאשר $C = 0.1$נקבל ש־1.4104

6. $1e^{-r(N)N} = 1e^{-f_{0,1}} e^{-f_{1,2}} ... e^{-f_{N-1,N}}$

$$r(N)\, N = f_{0,1} + f_{1,2} + f_{2,3} + + f_{N-1,N}$$

$$r(N) = r + s\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

הריבית לN שנים מורכבת מריבית קבועה rותוספת ריבית של $0.5s$בשנה

מחיר האגח לN שנים בעל קופון של C וערך נקוב F יהיה

$$P = C \sum_{i=1}^{N} e^{-\left(r + s\left(\frac{i-1}{2}\right)\right)i} + F e^{-\left(r + s\left(\frac{N-1}{2}\right)\right)N}$$

כאמור לפי הגדרת הנגזרת עבור ε קטן מתקיים $\frac{dP(0)}{ds} = \frac{P\left(r,\varepsilon\right) - P\left(r,0\right)}{\varepsilon}$ כלומר $\varepsilon\frac{dP(0)}{ds} = P\left(r,\varepsilon\right) - P\left(r,0\right)$

כלומר נגזור את P לפי s נציב 0 ונכפיל ב־ε ונקבל $P\left(r,\varepsilon\right) - P\left(r,0\right) = -\varepsilon \cdot \left(C \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{i^2-i}{2} e^{-ri} + F \cdot \frac{N^2-N}{2} \cdot e^{-rN} \right)$