

פיננסית 1- תשע"ו

תרגיל 3 - פתרון

1. נתונים $\mu_A = 0.1, \sigma_A = 0.15, \mu_B = 0.18, \sigma_B = 0.3, \rho_{AB} = 0.1$

(א) נשתמש בנוסחה $\alpha_A = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_B \sigma_A \rho_{AB}}{\sigma_B^2 + \sigma_A^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}$ נציב את הנתונים ונקבל $\alpha_A = 0.82$ ולכן $\alpha_B = 0.18$.

(ב) $\sigma^2 = \alpha_A^2 \sigma_A^2 + 2\alpha_A \alpha_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} + \alpha_B^2 \sigma_B^2 = 0.0194$ לכן $\sigma = \sqrt{0.0194} = 13.93\%$

(ג) $\mu = \alpha_A \mu_A + \alpha_B \mu_B = 0.1139 = 11.39\%$

2. נחשב את התוחלת הרווח שלו אם קנה ביטוח.

אם ירד גשם הרווח שלו יהיה $x - 1,000,000$ וכאשר ירד גשם הרווח שלו יהיה $-1,000,000 - x + 2x = x - 1,000,000$ כלומר המשתנה המקרי המתאר את הרווח שלו יהיה

$$Y \sim \begin{cases} x - 1,000,000 & 0.5 \\ 2,000,000 - x & 0.5 \end{cases}$$

מכאן התוחלת שלו היא $E[Y] = 500,000$

השונות שלו היא

$Var(Y) = 0.5 \cdot (x - 1,000,000)^2 + 0.5 \cdot (2,000,000 - x)^2 - 500,000^2 = x^2 - 3,000,000x + 2,250,000,000$
 המינימום של הפונקציה הנל מתקבל כאשר $x = 1,500,000$ ובמקרה זה השונות המתקבלת היא 0.

3. נתון $\Omega = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ו- $\mu = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix}$

(א) כדי למצוא את התיק MPV נפתור את מערכת המשוואות $\Omega v = \vec{1}$ כלומר

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הפתרון של המשוואות הנ"ל יהיה $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

ווקטור זה כבר מנורמל ולכן $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(ב) כדי למצוא תיק יעיל נוסף נפתור את המערכת המשוואות $\Omega v = \mu$ כלומר

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

הפתרון של המשוואות הנל יהיה $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

כעת ננרמל אותו ונקבל $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(ג) נתון $r_f = 0.2$ אז תיק השוק יהיה הפתרון של המשוואות $\Omega v = \mu - r_f$ כלומר

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

הפתרון של המשוואות הנל יהיה $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

כעת ננרמל אותו ונקבל $w = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4. נתון $\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \sigma_i^2 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$

לכן הפתרון של המשוואות $\Omega v = \vec{1}$ יהיה $v_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$ ואחרי נרמול זה יהיה $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$

כעת היות והנכסים ללא התאמה נקבל ש-

$$\frac{1}{\sigma_P^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \quad \text{מכאן} \quad \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j^2}} \right)^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j^2}}$$

5. פתרון:

(א) משפט שני הקרנות אומר שבעזרת צירוף של שתי קרנות בעלי שונות מינימלית ניתן לקבל את כל קבוצת התיקים בעלי שונות מינימלית.

(ב) לקרן הראשונה נפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} 3.5 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ונקבל $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50}{21} \\ \frac{10}{7} \\ \frac{32}{21} \end{pmatrix}$ כעת ננרמל את הוקטור ונקבל

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{56} \\ \frac{15}{56} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

לקרן השניה נפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} 3.5 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ונקבל $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ כעת ננרמל את הוקטור ונקבל

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

6. נתון $\Omega = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ ו- $\vec{\mu} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ נמצא את הלגרנג'יאן שהוא

$$L = 9w_1^2 + 9w_2^2 + 9w_3^2 + \lambda_1 (w_1 + w_2 + w_3 - 1) + \lambda_2 (\mu - 7w_1 - 6w_2 - 11w_3)$$

את הלגרנג'יאן יש לגזור לפי λ_1, λ_2 ואת הנגזרות להשוות ל-0 ולמצוא את w_1, w_2, w_3 כפונקציה של μ .

הפתרון הוא $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38-3\mu}{42} \\ \frac{31-3\mu}{21} \\ \frac{9\mu-58}{42} \end{pmatrix}$ והסטיית תקן היא

$$\sigma = \sqrt{9w_1^2 + 9w_2^2 + 9w_3^2} = \frac{1}{7} \sqrt{31.5\mu^2 - 504\mu + 2063}$$

7. נתון $\Omega = \begin{pmatrix} 2.5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $\vec{\mu} = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.1 \\ 0.12 \end{pmatrix}$ $\mu_f = 0.06$.

(א) כדי למצוא את תיק השוק נפתור את מערכת המשוואות $\Omega \vec{v} = \vec{\mu} - \mu_f$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{250} \\ \frac{3}{250} \\ \frac{2}{250} \end{pmatrix} \text{ ונקבל ש-}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{3}{12} \\ \frac{2}{12} \end{pmatrix} \text{ ואם ננרמל את הווקטור נקבל}$$

$$r_p = \alpha r_M + (1 - \alpha) r_f = 0.06 + 0.0825\alpha \text{ (ב) התשואה של התיק תהיה}$$

$$\sigma_P = \alpha \sigma_M = \sqrt{\frac{145}{96}} \alpha \text{ והסטיית תקן תהיה}$$