פיננסית 1־ תשע"ו
תרגיל 4 ־ פתרון

1. נתון $\sigma_M = 30\% \mu_f = 7\% \mu_M = 12\%$

(א) $\mu_P = 0.07 + \sigma_p\left(\frac{0.12-0.07}{0.3}\right) = \frac{1}{6}\sigma_P + 0.07$

(ב) נציב בתוצאה של הסעיף הקודם את $\mu_P = 0.2$ ונקבל $\sigma_P = 0.78$

(ג) $\mu_P = 0.7 \cdot \mu_M + 0.3 \cdot \mu_f = 9.5\%$

(ד) התשואה של תיק יעיל בעל שונות של 10%היא 8.66%. כעת נסמן ב־αבנכס חסר הסיכון נקבל את המשוואה $\alpha \cdot 0.07 + (1-\alpha)\,0.12 = 0.0866$ כלומר $\alpha = \frac{1}{3}$.

2. נתונים $r_f = 0.1, \mu_M = 0.18, \sigma_A^2 = 0.04, \sigma_B^2 = 0.02, \sigma_{AB} = 0.01, w_A = 0.5, w_B = 0.5$

(א)
$$\sigma_M^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_A w_B \sigma_{AB} + w_B^2\sigma_B^2 = 0.02$$
$$\beta_A = \frac{\sigma_{AM}}{\sigma_M^2} = \frac{0.5\sigma_A^2 + 0.5\sigma_{AB}}{\sigma_M^2} = 1.25$$
$$\beta_B = \frac{\sigma_{BM}}{\sigma_M^2} = \frac{0.5\sigma_B^2 + 0.5\sigma_{AB}}{\sigma_M^2} = 0.75$$

(ב)
$$\mu_A = r_f + \beta_A(\mu_M - r_f) = 0.1 + 1.25\,(0.18 - 0.1) = 0.2$$
$$\mu_B = r_f + \beta_B(\mu_M - r_f) = 0.1 + 0.75\,(0.18 - 0.1) = 0.16$$

(ג) סיכון סיסטמטי של נכס A $\beta_A^2\sigma_M^2 = 1.25^2 \cdot 0.02 = \frac{1}{32}$
סיכון לא סיסטמטי של נכס A $\sigma_A^2 - \beta_A^2\sigma_M^2 = 0.04 - 1.25^2 \cdot 0.02 = \frac{7}{800}$

(ד)
$$S_A = \frac{\mu_A - \mu_f}{\sigma_A} = \frac{1}{2}$$
$$S_B = \frac{\mu_B - \mu_f}{\sigma_B} = \frac{3}{7}$$

3. השאלה הופיעה האחד התרגולים

(א) תיק השוק הוא תיק יעיל ולכן מהווה צירוף לנארי של 2 תיקים בעלי שונות מינימלית. בנוסף לתיק השוק יש משקולות חיוביות.
נסמן ב־α את המשקל של תיק השוק בתיק w^1 ואז $1-\alpha$ היא המשקולת של תיק w^2, כלומר משקולות התיק השוק ביחס לשלושת הנכסים יהיו $m = \alpha w^1 + (1-\alpha)\,w^2 = \alpha \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 - 0.2\alpha \\ -0.2 + 0.4\alpha \\ 0.4 - 0.2\alpha \end{pmatrix}$,
כעת נדרוש שכל משקל יהיה חיובי
$$0.8 - 0.2\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 4$$
$$-0.2 + 0.4\alpha > 0 \Rightarrow \alpha > 0.5$$
$$0.4 - 0.2\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 2$$
כלומר $0.5 < \alpha < 2$
כאמור תשואה של התיק תהיה $\mu_m = \alpha\mu_{w^1} + (1-\alpha)\,\mu_{w^2}$, ראשית נחשב את $\mu_{w^1} = 0.1 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.12$ $\mu_{w^2} = 0.1 \cdot 0.8 - 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.4 = 0.8$ לכן $\mu_m = \alpha \cdot 0.12 + (1-\alpha) \cdot 0.08$ אם נציב את הגבולות של αנקבל ש־ $0.1 < \mu_m < 0.16$.

(ב) היות ו־w^1 הוא בעל שונות מינימלית הוא גם בעל תשואה מינימלית ולכן $\mu_{w^1} < \mu_m$ כלומר $0.12 < \mu_m < 0.16$

4. נתון $\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$ ושווי השוק של נכס i הוא X_i

כזכור מתקיים $\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$ נחשב כל דבר בנפרד ונקבל ש־

$$\sigma_{im} = cov\left(r_i, r_m\right) = cov\left(r_i, \sum_{j=1}^{n} r_j w_j\right) = \sum_{j=1}^{n} w_j cov\left(r_i, r_j\right) = w_i cov\left(r_i, r_i\right) = w_i \sigma_i^2$$

$$\sigma_m^2 = cov\left(r_m, r_m\right) = cov\left(\sum_{j=1}^{n} r_j w_j, \sum_{j=1}^{n} r_j w_j\right) = \sum_{i=1}^{n} w_j^2 cov\left(r_i, r_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2$$

לכן $\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{w_i \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2}$

5. נתון שלנכס A קיימות 100 מניות בשוק עם מחיר של 1.5 שח לכל אחת ו־$\mu_A = 0.15$ $\sigma_A = 0.15$. לנכס B קיימות 150 מניות בשוק עם מחיר של 2 שח לכל אחת ו־ $\mu_B = 0.12$ $\sigma_B = 0.09$ $\rho_{AB} = \frac{1}{3}$

(א) המשקולות של הנכסים בתיק השוק הן $w_A = \frac{1.5 \cdot 100}{1.5 \cdot 100 + 2 \cdot 150} = \frac{1}{3}$ ו־ $w_B = \frac{2 \cdot 150}{1.5 \cdot 100 + 2 \cdot 150} = \frac{2}{3}$ לכן $\mu_m = w_A \mu_A + w_B \mu_B = 0.13$

(ב) $\sigma_m^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + 2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} + w_B^2 \sigma_B^2 = \ldots = 0.081$ לכן $\sigma_m = 0.09$

(ג) $\beta_A = \frac{\sigma_{AM}}{\sigma_M^2} = \frac{cov\left(\mu_A, \mu_M\right)}{0.081} = \frac{\frac{1}{3}\sigma_A^2 + \frac{2}{3}\sigma_{AB}}{0.081} = \ldots = 1.29$

(ד) כזכור מתקיים $\mu_A = \mu_f + \beta_A\left(\mu_M - \mu_f\right)$ נציב ונקבל $\mu_f = 0.061$

6. נתון $\mu_f = 0.05$, $\mu_m = 0.15$, $\beta_A = \beta_B = \beta_C = 0.8$, $\sigma_A = 0.15$, $\sigma_B = 0.2$, $\sigma_C = 0.3$

(א) בעזרת הנוסחא $\mu_p = r_f + \beta_p\left(\mu_M - r_f\right)$ נקבל ש־$\mu_A = 0.065, \quad \mu_B = 0.07, \quad \mu_C = 0.08$

(ב) לא נכון, $\beta_i = \frac{\sigma_i \rho_{im}}{\sigma_m^2}$ הוא קושר את הקורלציה עם השוק והסיכון, בעוד ש־σ_i אינו קשור לשוק כלל.

(ג) המשקל של ה־400,000 מהתיק הישן יהיה $\frac{400,000}{400,000 + 100,000} = 0.8$

והמשקל של הכסף החדש יהיה $\frac{100,000}{400,000 + 100,000} = 0.2$

לכן ה־$\beta = 0.8 \cdot 1.2 + 0.2 \cdot 0.8 = 1.12$ ו־$\mu_P = \mu_f + \beta_P\left(\mu_m - \mu_f\right) = 0.162$

(ד) היות וקבענו את β, μ_P נדרוש שה־σ_p של התיק החדש יהיה מינימלי. מבנה התיק החדש הוא $0.8 \cdot P' + 0.2 \cdot \left(w_A A + w_B B + w_C C\right)$ וכדי לחשב את המשקולות של w_A, w_B, w_C אנחנו צריכים את הסטיית תקן של P', A, B, C ואת השונות המשותפת בניהם.