פיננסית 1- תשע"ו
תרגיל 6 - פתרון

1. שאלה על אי שוויון ינסן

(א) $f(x)=sin(x)$ מכאן $f''(x)=-sin(x)$ היא שלילית בקטע $0<x<\pi$ לכן קעורה. ולפי אי שוויון ינסן נקבל ש-
$$\frac{sin(A)+sin(B)+sin(C)}{3}\leq sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
כלומר $sin(A)+sin(B)+sin(C)\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(ב) $f(x)=\ln(x)$ מכאן $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$ היא שלילית עבור $x>0$ לכן קעורה. ולפי אי שיווין ינסן נקבל ש-
$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)}{n}\leq\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)$$ כלומר $$\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}\leq\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)$$
נוציא exp ונקבל $\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ שימו לב שהיתה טעות בשאלה לגבי כיוון היא שוויון!

(ג) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ מכאן נקבל ש- $f''(x)=\frac{3}{4}(x+1)^{-2.5}$ היא חיובית עבור $x>0$ לכן קמורה. ולפי אי שיווין ינסן נקבל ש- $f\left(\frac{8bc}{a^2}\right)+f\left(\frac{8ac}{b^2}\right)+f\left(\frac{8ba}{c^2}\right)\geq f\left(\frac{8bc}{a^2}+\frac{8ac}{b^2}+\frac{8ba}{c^2}\right)$ ומזה נקבל את האי שוויון הדרוש.

2. למשקיע בעל פונקצית תועלת $U(x)=\sqrt{x}$ והון של 5 שח אם הוא לא משחק התועלת שלו תהיה $U(5)=\sqrt{5}=2.23$

(א) אם הוא ישחק את המשחק תוחלת התועלת תהיה $\frac{1}{2}\sqrt{1}+\frac{1}{2}\sqrt{9}=2<2.23$ לכן יבחר שלא להשתתף.

(ב) אם הוא ישחק את המשחק תוחלת התועלת תהיה $\frac{1}{2}\sqrt{1}+\frac{1}{2}\sqrt{21}=2.79>2.23$ לכן יבחר להשתתף.

(ג) אם הוא ישחק את המשחק תוחלת התועלת תהיה $\frac{1}{2}\sqrt{1}+\frac{1}{2}\sqrt{5+c}=2.23$ לכן $c=7.05$.

3. תוחלת התועלת שלו תהיה $\frac{1}{2}\left(-1.2^{-b}-0.9^{-b}\right)$ אם $b=3$ אז תוחלת התועלת תהיה 0.97- ולכן שווה הערך הוודאי הוא 1.01, במידה ו $x=5$ תוחלת התועלת תהיה -1.04 ולכן שווה הערך הוודאי הוא 0.98.
הערך הוודאי שלו כפונקציה של b יהיה $\left(\frac{1}{2}\left(-1.2^{-b}-0.9^{-b}\right)\right)^{-\frac{1}{3}}-$ ניתן לבדוק שהנגזרת שלילית ולכן יורדת עם b וכן שהגבול של יהיה 0.

4. תוחלת התועלת שלו אחרי השקעה של y בהשקעה תהיה
$$\frac{1}{2}\left(-(100-y+0.9y)^{-b}-(100-y+1.2y)^{-b}\right)=\frac{1}{2}\left(-(100-0.1y)^{-b}-(100+0.2y)^{-b}\right)$$
לדבר הזה יש למצוא מקסימום ולבדוק עבור איזה b מתקיים $y=100$ ו- $y>100$

5. עשינו שאלה דומה בכיתה

(א) $u(x)=\sqrt{x}$

הסתברות	בונוס	שכר כללי	u(שכר כללי)
$\frac{1}{6}$	0	1000	31.62
$\frac{1}{6}$	100	1100	33.16
$\frac{1}{6}$	200	1200	34.64
$\frac{1}{6}$	300	1300	36.05
$\frac{1}{6}$	400	1400	37.41
$\frac{1}{6}$	500	1500	38.72

מכאן תוחלת התועלת היא $\frac{1}{6}\cdot 31.62+\frac{1}{6}\cdot 33.16+\frac{1}{6}\cdot 34.64+\frac{1}{6}\cdot 36.05+\frac{1}{6}\cdot 37.41+\frac{1}{6}\cdot 38.72=35.266$ לכן הערך הוודאי הוא $35.266^2=1243$.

(ב) תוחלת התועלת היא $E\left[u\left(x\right)\right]=\int\limits_0^{500} u\left(x\right)\cdot\frac{1}{500}dx=\int\limits_0^{500}\sqrt{1000+x}\cdot\frac{1}{500}dx$ יש לחשב את האינגרל הנ"ל ולעלות בריבוע את התוצאה.

(ג) יש לבצע את הסעיפים הנל רק שבמקום $u\left(x\right)=\sqrt{x}$ נשתמש ב־ $u\left(x\right)=-e^{-\frac{x}{1000}}$

6. $X=\begin{cases}\mu-\sqrt{\frac{1-p}{p}}\sigma & p\\ \mu+\sqrt{\frac{p}{1-p}}\sigma & 1-p\end{cases}$ עבור $0<p<1$ ו־$\sigma>0$

(א) $E\left[X\right]=p\cdot\left(\mu-\sqrt{\frac{1-p}{p}}\sigma\right)+\left(1-p\right)\left(\mu+\sqrt{\frac{p}{1-p}}\sigma\right)=\mu-\sqrt{p\left(1-p\right)}\sigma+\sqrt{\left(1-p\right)p}\sigma=\mu$

$$Var\left(x\right)=p\left(\mu-\sqrt{\frac{1-p}{p}}\sigma\right)^2+\left(1-p\right)\left(\mu+\sqrt{\frac{p}{1-p}}\sigma\right)^2-\mu^2=p\left(\mu^2-2\mu\sqrt{\frac{1-p}{p}}\sigma+\frac{1-p}{p}\sigma^2\right)+\left(1-p\right)\left(\mu^2+2\mu\sqrt{\frac{p}{1-p}}\sigma+\frac{p}{1-p}\sigma^2\right)-\mu^2=-2\mu\sqrt{p\left(1-p\right)}\sigma+2\mu\sqrt{p\left(1-p\right)}\sigma+\left(1-p+p\right)\sigma^2=\sigma^2$$

(ב) $V\left(\mu,\sigma,p\right)=E\left[u\left(x\right)\right]=pU\left(\mu-\sqrt{\frac{1-p}{p}}\sigma\right)+\left(1-p\right)U\left(\mu+\sqrt{\frac{p}{1-p}}\sigma\right)$

(ג) $\frac{\partial V}{\partial\mu}=pU'\left(\mu-\sqrt{\frac{1-p}{p}}\sigma\right)\cdot 1+\left(1-p\right)U'\left(\mu+\sqrt{\frac{p}{1-p}}\sigma\right)\cdot 1>0$

$$\frac{\partial V}{\partial\sigma}=-pU'\left(\mu-\sqrt{\frac{1-p}{p}}\sigma\right)\cdot\sqrt{\frac{1-p}{p}}+\left(1-p\right)U\left(\mu+\sqrt{\frac{p}{1-p}}\sigma\right)\cdot\sqrt{\frac{p}{1-p}}=-\sqrt{p\left(1-p\right)}\left(U'\left(\mu-\sqrt{\frac{1-p}{p}}\sigma\right)-U'\left(\mu+\sqrt{\frac{p}{1-p}}\sigma\right)\right)<0$$

(ד) התוצאות עולות בקנה אחד עם מודל מרקוביץ כי מי שמשקיע לפי מודל מרקוביץ תוחלת התועלת שלו יורדת ביחס לסטיית תקן ועולה יחס תשואה.

7. $E\left[U\left(x\right)\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u\left(x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{(x-\rho)^2}{2\sigma^2}}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u\left(\mu+\sigma z\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

אם נגזור לפי μ נקבל $\int\limits_{-\infty}^{\infty}u'\left(\mu+\sigma z\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ שזה חיובי , ואם נגזור לפי σ נקבל $\int\limits_{-\infty}^{\infty}u'\left(\mu+\sigma z\right)\cdot\frac{Z}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ ועל ידי אינטגרציה בחלקים אפשר להגיע לכך שזה שלילי.

8. נסמן ב־A את כמות השקלים שהוא משקיע במסלול הראשון, ב־B את כמות השקלים שהוא משקיע במסלול השני, ו־C את כמות השקלים שהוא משקיע במסלול השלישי.
תוחלת התועלת של המסלול הראשון הוא $-e^{-\frac{0.03}{10}A}$
של המסלול השני $-0.6e^{-\frac{0.06}{10}B}-0.4e^{-\frac{0.01}{10}B}$
ושל המסלול השלישי $-0.6e^{-\frac{0.1}{10}C}-0.2e^{-\frac{0}{10}C}-0.2e^{\frac{0.05}{10}C}$
התועלת הכללית שלו היא סכום התועלות.
לביטוי זה $-e^{-\frac{0.03}{10}A}+-0.6e^{-\frac{0.06}{10}B}-0.4e^{-\frac{0.01}{10}B}-0.6e^{-\frac{0.1}{10}C}-0.2e^{-\frac{0}{10}C}-0.2e^{\frac{0.05}{10}C}$ יש לחפש מקסימום תחת האילוץ $A+B+C=P$
במקרה שלנו $P=10$ ו־$P=100$