בס"ד

מתמטיקה פיננסית 1, פרופ' ג'רמי שיף

פתרון של תרגיל 5, חלק שני

נתון מודל עם שני פקטורים לשלוש מניות כדלהלן. יש להניח שלפקטורים ולשגיאות יש תוחלת 0, שלשני הפקטורים יש שונות 0.01 ואינם מותאמים, ש- $\mathrm{Var}(e_1) = 0.01$, $\mathrm{Var}(e_2) = 0.04$, $\mathrm{Var}(e_3) = 0.02$, ושהשגיאות אינן מותאמות לא זו עם זו ולא עם הפקטורים.

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.13 + 6f_1 + 4f_2 + e_1 \\ r_2 &= 0.15 + 2f_1 + 2f_2 + e_2 \\ r_3 &= 0.07 + 5f_1 - f_2 + e_3 \end{aligned}$$

1. מהן התוחלות של התשואות ?
2. מצא את מטריצת השונויות והקו-ווריאנצים של התשואות .
3. מצא תיק אחד עם עלות 0, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, ועוד תיק עם עלות 0, $b_2 = 1$, $b_1 = 0$.
4. מצא את התוחלות של הרווחים של התיקים שמצאת בסעיף הקודם, וגם את ערך הסיכון של הפקטור הראשון ושל הפקטור השני.
5. יש מניה רביעית עם תשואה

$$r_4 = 0.15 + f_1 + f_2$$

האם יש הזדמנות לארביטראז' ?

---

1. $\mathbf{E}[r_1] = 0.13$, $\mathbf{E}[r_2] = 0.15$, $\mathbf{E}[r_3] = 0.07$.
2.

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(r_1) &= 36\mathrm{Var}(f_1) + 16\mathrm{Var}(f_2) + \mathrm{Var}(e_1) = 0.53 \\ \mathrm{Var}(r_2) &= 4\mathrm{Var}(f_1) + 4\mathrm{Var}(f_2) + \mathrm{Var}(e_2) = 0.12 \\ \mathrm{Var}(r_3) &= 25\mathrm{Var}(f_1) + \mathrm{Var}(f_2) + \mathrm{Var}(e_3) = 0.28 \\ \mathrm{cov}(r_1, r_2) &= \mathrm{cov}(6f_1 + 4f_2 + e_1, 2f_1 + 2f_2 + e_2) \\ &= 12\mathrm{Var}(f_1) + 8\mathrm{Var}(f_2) \\ &= 0.20 \\ \mathrm{cov}(r_1, r_3) &= \mathrm{cov}(6f_1 + 4f_2 + e_1, 5f_1 - f_2 + e_3) \\ &= 30\mathrm{Var}(f_1) - 4\mathrm{Var}(f_2) \\ &= 0.26 \\ \mathrm{cov}(r_2, r_3) &= \mathrm{cov}(2f_1 + 2f_2 + e_1, 5f_1 - f_2 + e_3) \\ &= 10\mathrm{Var}(f_1) - 2\mathrm{Var}(f_2) \\ &= 0.08 \end{aligned}$$

המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 0.53 & 0.20 & 0.26 \\ 0.20 & 0.12 & 0.08 \\ 0.26 & 0.20 & 0.28 \end{pmatrix}$$

3. נניח שמשקיעים $\alpha_1, \alpha_2\alpha_3$ ב-3 הנכסים בהתאם. הרווח יהיה

$$\begin{aligned}\alpha_1 r_1+\alpha_2 r_2+\alpha_3 r_3 &= (0.13\alpha_1+0.15\alpha_2+0.07\alpha_3)+(6\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3)f_1\\ &+(4\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)f_2+\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3\end{aligned}$$

לתיק עם עלות 0, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ יש לקחת

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= 0\\ 6\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3 &= 1\\ 4\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

פותרים לקבל

$$\alpha_1=\frac{3}{18}\,,\alpha_2=-\frac{5}{18}\,,\alpha_3=\frac{2}{18}$$

נקרא לתיק הזה π_1. יש לו רווח

$$-\frac{0.22}{18}+f_1+\frac{1}{18}(3e_1-5e_2+2e_3)$$

לתיק עם עלות 0, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ יש לקחת

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= 0\\ 6\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3 &= 0\\ 4\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3 &= 1\end{aligned}$$

פותרים לקבל

$$\alpha_1=\frac{3}{18}\,,\alpha_2=\frac{1}{18}\,,\alpha_3=-\frac{4}{18}$$

נקרא לתיק הזה π_2. יש לו רווח

$$\frac{0.26}{18}+f_2+\frac{1}{18}(3e_1+e_2-4e_3)$$

למטרת שימוש בסעיף הבאה גם נבנה תיק עם עלות 1, 0 $b_1 = b_2 = 0$. יש לקחת

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= 1\\ 6\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3 &= 0\\ 4\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

פותרים לקבל

$$\alpha_1=-\frac{6}{9}\,,\alpha_2=\frac{13}{9}\,,\alpha_3=\frac{2}{9}$$

נקרא לתיק הזה π_3. יש לו רווח

$$\frac{1.31}{9}+\frac{1}{9}(-6e_1+13e_2+2e_3)$$

4. התוחלות של הרווחים של שלושת התיקים π_1, π_2, π_3 הם בהתאם $\frac{2.62}{18}, \frac{0.26}{18}, -\frac{0.22}{18}$.
תזכורת של משפט חוסר ארביטראז': אם $r_i = a_i + \sum b_{ij} f_j + e_i$ אזי $a_i = \lambda_0 + \sum b_{ij}\lambda_j + n_i$ כאשר λ_j הוא המחיר של סיכון של הפקטור f_j ובוחרים את הקבועים $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ כך ש $\sum n_i^2$ יהיה כמה שאפשר יותר קטן.
במקרה שלנו ניתן למצוא את $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ ללא שגיאות n_i בכלל על ידי פתרון המערכת

$$\begin{aligned}0.13 &= \lambda_0+6\lambda_1+4\lambda_2\\ 0.15 &= \lambda_0+2\lambda_1+2\lambda_2\\ 0.07 &= \lambda_0+5\lambda_1-\lambda_2\end{aligned}$$

ניתן לפתור באופן ישיר או לשים לב שבעצם הפכנו את המטריצה שמופיע במערכת זו על ידי החישובים בסעיף הקודם, ולכן הפתרון הוא

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -12 & 26 & 4 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.13 \\ 0.15 \\ 0.07 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2.61 \\ -0.22 \\ 0.26 \end{pmatrix}$$

יצא שמחיר הסיכון של הפקטור f_1 הוא $\frac{-0.22}{18}$ ומחיר הסיכון של הפקטור f_2 הוא $\frac{0.26}{18}$. אלה בדיוק המחירים של התיקים π_1 ו- π_2 מהסעיף הקודם. באופן כללי - עם (אולי) יותר פקטורים ועוד (הרבה) נכסים - ניתן להראות שמחיר הסיכון של פקטור מסויים שווה לתוחלת הרווח של התיק ה"יעיל ביותר" (במובן מסויים) עם עלות 0 וחשיפה רק לפקטור הזה (יש בדרך כלל הרבה תיקים כזה - בדוגמה שלנו עם 3 נכסים ושני פקטורים יש רק אחד).

5. לפי התוצאות שמצאנו, תוחלת התשואה של הנכס אמור להיות $\frac{1}{18}(2.62 - 0.22 + 0.26) \approx 0.1478$

זה שיש לו תוחלת תשואה 0.15 נראה מבטיח. אבל לא לקחנו בחשבון את השגיאות e_i. אם נקנה יחידה אחת של הנכס החדש ונמכור יחידה אחת של תיק π_1 ויחידה אחת של תיק π_2 הרווח יהיה

$$\begin{aligned} & 0.15 + f_1 + f_2 - \left(-\frac{0.22}{18} + f_1 + \frac{1}{18}(3e_1 - 5e_2 + 2e_3)\right) - \left(\frac{0.26}{18} + f_2 + \frac{1}{18}(3e_1 + e_2 - 4e_3)\right) \\ = \; & \frac{1}{18}(2.66 - 6e_1 + 4e_2 + 2e_3) \\ = \; & \frac{2.62}{18} + \frac{1}{18}(0.04 - 6e_1 + 4e_2 + 2e_3) \end{aligned}$$

סטיות התקן של e_1, e_2, e_3 הם בין 0.1 ל- 0.2, ולכן לא ניתן להגיד שום דבר על הסימן של הביטוי בסוגריים, ואין ארביטראז'.