

1. (א) הוכח שהפונקציה  $f(x) = \sin x$  היא קעורה בקטע  $0 < x < \pi$ , ולכן לכל משולש  $ABC$ ,  

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(ב) הוכח שהפונקציה  $f(x) = \ln x$  היא קעורה עבור  $x > 0$ . העזר בזה להוכיח את אי-שיויון הממוצעים האירטמיים והגאומטריים

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$$

לכל סדרה של מספרים חיוביים  $x_1, \dots, x_n$

(ג) הוכח שהפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$  היא קמורה עבור  $x > 0$  והעזר בזה להוכיח שלכל שלושה מספרים חיוביים  $a, b, c$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

2. למשקיע עם הון 5 יש פונקציית תועלת  $U(x) = \sqrt{x}$

(א) מציעים לו לשחק משחק שבו הוא יוכל או לרוויח 4 או להפסיד 4, שניהם בהסתברות  $\frac{1}{2}$ . האם הוא ירצה להשתתף?

(ב) מציעים לו לשחק משחק שבו הוא יוכל או לרוויח 16 או להפסיד 4, שניהם בהסתברות  $\frac{1}{2}$ . האם הוא ירצה להשתתף?

(ג) עבור איזה ערכים של  $C$  ירצה להשתתף במשחק שבו הוא יוכל להרוויח  $C$  או להפסיד 4, שניהם בהסתברות  $\frac{1}{2}$ ?

3. המשתנה המקרי  $X$  מקבל את הערכים 0.9 ו-1.2, שניהם בהסתברות  $\frac{1}{2}$ . אם יש למשקיע פונקציית תועלת  $U(x) = -x^{-b}$ , כאשר  $b > 0$  מצא את הערך הוודאי של  $X$  במקרים  $b = 3$  ו- $b = 5$ . והוכח שהערך הוודאי הוא פונקציה יורדת של  $b$ . מה קורה בגבול  $b \rightarrow \infty$ ? נמק את תשובתך!

4. למשקיע עם הון 100 יש פונקציית תועלת  $U(x) = -x^{-b}$ . הוא יכול להשקיע כל סכום  $y$  בהשקעה שמשלמת  $0.9y$  בהסתברות  $\frac{1}{2}$  ו- $1.2y$  בהסתברות  $\frac{1}{2}$ . (אין הגבלה על  $y$ , הוא יכול למכור את ההשקעה בחסר, כלומר לבחור  $y < 0$ , וגם לקחת הלוואה להשקיע, כלומר לבחור  $y > 100$ ). כמה כסף אתה מציע לו להשקיע? עבור איזה ערכים של  $b$  יקח הלוואה כדי להשקיע? עבור איזה ערך של  $b$  ישקיע את כל ההון שיש לו, ללא תוספת של הלוואה?

5. (א) מציעים למישהו עם הון  $W$  ופונקציית תועלת  $U(x) = \sqrt{x}$  עבודה עם משכורת וודאית 1000 ובונוס שהוא משתנה מקרי המקבל את הערכים 0, 100, 200, 300, 400, 500 בהסתברות אחידה. מצא ביטוי לערך הוודאי של העבודה. האם הערך הוודאי עולה או יורד עם  $W$ ? מהו פרמיית הסיכון?

(ב) חזור על הסעיף הקודם במקרה שהבונוס הוא משתנה מקרי אחיד בקטע  $[0, 500]$ .

(ג) חזור על שני הסעיפים הקודמים במקרה שפונקציית התועלת היא  $-e^{-x/1000}$ .

6. המשתנה המקרי  $X$  מקבל את הערך  $\mu - \sqrt{\frac{1-p}{p}}\sigma$  בהסתברות  $p$  ואת הערך  $\mu + \sqrt{\frac{p}{1-p}}\sigma$  בהסתברות  $1-p$ . כאן  $\mu, \sigma, p$  הם קבועים עם  $0 < p < 1$  ו- $\sigma > 0$

(א) הוכח ש- $\mathbf{E}[X] = \mu$  ו- $\text{Var}(X) = \sigma^2$

(ב) כתוב ביטוי ל- $V(\mu, \sigma, p) = \mathbf{E}[U(X)]$  כאשר  $U$  היא פונקציית תועלת.

(ג) הוכח ש-

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} > 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \sigma} < 0$$

(ד) האם ניתן להסיק מתוצאות הסעיף הקודם שבמקרה שהתפלגות התקבולים היא לפי המתואר בשאלה זו, התוצאות של תורת התועלת עולות בקנה אחד עם ההנחות של מודל מרקוביץ?

7. הוכח שאם  $U, X \sim N(\mu, \sigma)$  היא פונקציית תועלת, ו-

$$V(\mu, \sigma) = \mathbf{E}[U(X)]$$

אזי

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} > 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \sigma} < 0$$

8. יש למשקיע פונקציית תועלת  $U(x) = -e^{-x/10}$  והון 10. עומדים לפניו 3 ערוצי השקעה:

(א) משלם תשואה קבועה 3%

(ב) משלם תשואה 6% במקרה שהשוק הוא "טוב" - שקורה בהסתברות 0.6 - ותשואה 1% אחרת.

(ג) משלם תשואה 10% במקרה שהשוק הוא "טוב", תשואה 0 במקרה שהשוק איננו "טוב" אלא "לא רע מאוד" - שקורה בהסתברות 0.2 - ותשואה שלילית 5% - אחרת.

מצא את התיק האופטימלי למשקיע זה לפי כלל תוחלת התועלת המירבית. איך יש לשנות את התוצאה במקרה ויש למשקיע הון התחלתי 100?

בהצלחה!