

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
 מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
 ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. (א) על ידי שימוש בלמה של איטו עבור $Y(t) = e^{-at} X(t)$, הוכח שאם המשתנה הסטוכסטי $X(t)$ מקיים את המד"ס

$$dX = a X dt + b dW$$

כאשר a, b הם קבועים, אזי

$$X(t) = X(0)e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-s)} dW(s)$$

(ב) המשתנים הסטוכסטיים X, Y מקיימים את מערכת המד"ס

$$\begin{aligned} dX &= Y dt + \lambda dW \\ dY &= (-2X - 3Y) dt + \mu dW \end{aligned}$$

כאשר λ, μ הם קבועים. על ידי כתיבת מד"ס לצירופים

$$Z_1 = X + \frac{1}{2}Y, \quad Z_2 = X + Y$$

מצא את הפתרון של המערכת.

(ג) מה היא שיטת אויילר-מרוימה לפתרון המערכת בסעיף ב'?

2. הערך של סל של 30 מניות הוא $\sum_{i=1}^{30} S_i(t)$ כאשר המשתנים $S_i(t), i = 1, \dots, 30$, מקיימים את המשוואות

$$dS_i = S_i (r dt + \sigma_i dW + \eta_i dV_i), \quad i = 1, \dots, 30$$

כאן $r, \sigma_1, \dots, \sigma_{30}, \eta_1, \dots, \eta_{30}$ כולם קבועים נתונים, עם η_i קטן ביחס ל- σ_i , ו- W, V_1, \dots, V_{30} הם תהליכי וינר בלתי תלויים סטנדרטיים. (האיבר $\sigma_i dW$ מייצג את התנודתיות המשותפת של המניות, והאיבר $\eta_i dV_i$ מייצג את התנודתיות הייחודית של מניה i .)

רוצים לתמחר אופציה המבוססת על ערך הסל בזמן $t = T$. הוצע שניתן לעשות כן דרך משתנה בקרה S המקיים את המשוואה

$$dS = S(r dt + \Sigma dW)$$

עבור בחירה מתאימה של הקבוע Σ .

(א) איך היית מציע לבחור את Σ ?

(ב) הסבר, בקצרה, איך משתמשים במשתנה הבקרה.

(ג) איך ניתן לבדוק את יעילות השימוש במשתנה הבקרה? איך ניתן לבדוק שהבחירה של Σ היתה סבירה?

3. כתוב את שיטת קרנק-ניקולסון עבור המשוואה

$$u_t = u_{xx} - au, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

עם תנאי שפה

$$u_x(0, t) = b, \quad u(1, t) = c.$$

כאן a, b, c הם קבועים חיוביים נתונים. יש לנסח את המשוואות שיש לפתור כדי להתקדם בזמן, אין צורך להתייחס לשאלה איך בפועל פותרים את המשוואות. על ידי שימוש בשיטת וון-נוימן לבדיקת יציבות, בדוק ששיטת קרנק-ניקולסון היא יציבה לבעיה זו, בלי שום תנאי על הצעד בזמן.

4. כתוב קטע קוד במטלב:

אן לפתור את הבעיה בשאלה 3, כלומר לפתור את המשוואה הנתונה בעזרת שיטת קרנק-ניקולסון, עם תנאי השפה הנתונים, ותנאי התחלה

$$u(x, 0) = c + b(x - 1)$$

ניתן להניח שנתונים ערכים של a, b, c . התוכנית תצייר את הגרפים של

$$u(x, 0), u(x, 0.25), u(x, 0.5), u(x, 0.75), u(x, 1)$$

אן לעשות סמולציה הרלוונטית לשאלה 2, לבדוק, עבור ערכים שונים של Σ , את הקורלציה בין הערך של הסל בזמן T והערך של משתנה הבקרה S בזמן T , כדי להחליט על הערך המתאים של Σ . ניתן להניח שנתונים ערכים לפרמטרים $r, \sigma_1, \dots, \sigma_{30}, \eta_1, \dots, \eta_{30}$. התוכנית תצייר גרף של ערכים של הקורלציה כפונקציה של Σ .

5. רוצים לפתור את בעיית השפה החופשית

$$u_t = u_{xx} + x \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = 2$$

$$u(s(t), t) = u_x(s(t), t) = 0$$

$$u(x, 0) = (x - 1)^2, \quad s(0) = 1$$

על ידי החלפת המשתנים

$$\begin{cases} x = ys(\tau) \\ t = \tau \end{cases}$$

נסח את הבעיה כבעייה על התחום הקבוע $0 < y < 1$ והסבר בקצרה איך ניתן לפתור את הבעייה החדשה עם שיטת אוילר.

בהצלחה!