בס"ד

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית, פרופ' ג'רמי שיף, 88-902-02

מבחן מועד א', סמסטר ב' תש"ע - פתרונות

1. (א) על ידי שימוש בלמה של איטו עבור $Y(t)=e^{-at}X(t)$, הוכח שאם המשתנה הסטוכסטי $X(t)$ מקיים את המד"ס

$$dX = a\ X\ dt + b\ dW$$

כאשר a,b הם קבועים, אזי

$$X(t)=X(0)e^{at}+b\int_0^t e^{a(t-s)}dW(s)$$

(ב) המשתנים הסטוכסטיים X,Y מקיימים את מערכת המד"סים

$$\begin{aligned} dX &= Y\ dt+\lambda\ dW \\ dY &= (-2X-3Y)\ dt+\mu\ dW \end{aligned}$$

כאשר λ,μ הם קבועים. על ידי כתיבת מד"סים לצירופים

$$Z_1 = X+\frac{1}{2}Y\ , \qquad Z_2 = X+Y$$

מצא את הפתרון של המערכת.

(ג) מה היא שיטת אויילר-מרויימה לפתרון המערכת בסעיף ב' ?

(א) הלמה של איטו: אם

$$dX = a(X,t)dt+b(X,t)dW$$

אזי

$$dg(X,t)=\left(g_t+ag_X+\frac{1}{2}b^2g_{XX}\right)dt+bg_XdW$$

בשבילנו

$$dX = aXdt+bdW$$

(לא אותו a,b !) ולכן

$$d\left(e^{-at}X\right)=\left(-ae^{at}X+aXe^{-at}\right)dt+be^{-at}dW=be^{-at}dW$$

ולכן

$$e^{-at}X(t)-X(0)=b\int_0^t e^{-as}dW(s)$$

ו-

$$X(t)=X(0)e^{at}+b\int_0^t e^{a(t-s)}dW(s)$$

(ב)

$$\begin{aligned} dZ_1 &= dX + \frac{1}{2}dY \\ &= Ydt + \lambda dW + \frac{1}{2}\left(-(2X+3Y)dt + \mu dW\right) \\ &= -Z_1 + \left(\lambda + \frac{1}{2}\mu\right) dW \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dZ_2 &= dX + dY \\ &= Ydt + \lambda dW - (2X+3Y)dt + \mu dW \\ &= -2Z_2 + (\lambda + \mu)\, dW \end{aligned}$$

על ידי התוצאה של סעיף א':

$$Z_1(t) = Z_1(0)e^{-t} + b\int_0^t e^{s-t}dW(s)\ , \qquad Z_2(t) = Z_2(0)e^{-2t} + b\int_0^t e^{2(s-t)}dW(s)$$

ולכן

$$X(t) = 2Z_1(t) - Z_2(t) = (2X(0)+Y(0))e^{-t} - (X(0)+Y(0))e^{-2t} + b\int_0^t \left(2e^{s-t} - e^{2(s-t)}\right) dW(s)$$

$$Y(t) = 2Z_1(t) - 2Z_2(t) = (2X(0)+Y(0))e^{-t} - 2(X(0)+Y(0))e^{-2t} + b\int_0^t \left(2e^{s-t} - 2e^{2(s-t)}\right) dW(s)$$

(ג)

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} Y_n \\ -2X_n - 3Y_n \end{pmatrix} + \sqrt{h} Z_n \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \qquad Z_n \sim N(0,1)$$

---

2. הערך של סל של 30 מניות הוא $\sum_{i=1}^{30} S_i(t)$ כאשר המשתנים $S_i(t)$, $i = 1, \dots, 30$, מקיימים את המשוואות

$$dS_i = S_i\left(rdt + \sigma_i dW + \eta_i dV_i\right)\ , \quad i = 1, \dots, 30$$

כאן $r, \sigma_1, \dots, \sigma_{30}, \eta_1, \dots, \eta_{30}$ כולם קבועים נתונים, עם η_i קטן ביחס ל- σ_i, ו- $W, V_1, \dots, V_{30}$ הם תהליכי וינר בלתי תלויים סטנדרטיים. (האיבר $\sigma_i dW$ מייצג את התנודתיות המשותפת של המניות, והאיבר $\eta_i dV_i$ מייצג את התנודתיות הייחודית של מניה i.)

רוצים לתמחר אופצייה המבוססת על ערך הסל בזמן $t = T$. הוצע שניתן לעשות כן דרך משתנה בקרה S המקיים את המשוואה

$$dS = S(rdt + \Sigma dW)$$

עבור בחירה מתאימה של הקבוע Σ.

(א) איך היית מציע לבחור את Σ ?

(ב) הסבר, בקצרה, איך משתמשים במשתנה הבקרה.

(ג) איך ניתן לבדוק את יעילות השימוש במשתנה הבקרה ? איך ניתן לבדוק שהבחירה של Σ היתה סבירה ?

(א) זו שאלה על פניו "פשוטה" אבל אין תשובה פשוטה, ויש הצעות שונות בספרות. אנחנו רוצים למצוא Σ כל שהערך של $S(T)$ שווה בערך לערך של הסל, כלומר

$$\left(\sum_i S_i(0)\right) e^{\left(r-\frac{1}{2}\Sigma^2\right)T+\Sigma W(T)} \approx \sum_i S_i(0) e^{\left(r-\frac{1}{2}(\sigma_i^2+\eta_i^2)\right)T+\sigma_i W(T)+\eta_i V_i(T)}$$

המשתנים V_i לא מופיעים בצד שמאל, לכן נעשה תוחלת ביחס למשתנים אלה ונקבל

$$\left(\sum_i S_i(0)\right) e^{\left(r-\frac{1}{2}\Sigma^2\right)T+\Sigma W(T)} \approx \sum_i S_i(0) e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T+\sigma_i W(T)}$$

עכשיו עם לוקחים תוחלת גם ביחס ל- $W(T)$ נקבל זהות, לא משנה מה זה הערך של Σ. הצעה אחת היא לבחור את Σ כך שיהיה זהות כאשר $W(T)=0$ - זה לפחות נותן תנאי פשוט

$$\left(\sum_i S_i(0)\right) e^{\left(r-\frac{1}{2}\Sigma^2\right)T} \approx \sum_i S_i(0) e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T} \Rightarrow \Sigma^2 = 2\left(r-\frac{1}{T}\ln\frac{\sum_i S_i(0)e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T}}{\sum_i S_i(0)}\right)$$

הצעה אחרת היא לדרוש שוויון של השונויות . אין נוסחה פשוטה לזה - צריך לעשות שונות של סכום של מ"מים תלויים בצד ימין. עוד הצעה היא לבחור את Σ כך שמקדם המתאם בין הסל ובין $S(T)$ יהיה כמה שאפשר יותר גבוה. שים לב - כל ההצעות האלה הם רלוונטיים כאשר מאפשרים תלות על T ב- Σ. אם רוצים משהו אחד טוב לכל ערך של T, זה משהו אחר - רק אפשר להתקדם אם T הוא קטן.

(ב) הכוונה פה היא שרוצים לתמחר אופציה המבוססת על הערך של הסל, ונקח כמשתנה בקרה את אותה אופציה, אבל מבוססת על $S(T)$. מניחים שיודעים נוסחה סגורה לאופציה השניה, לדוגמה נוסחת בלק-שולס. נקרא לערך של האופציה הראשונה X (תלוי על $W(T),V(T_i)$) ולאופציה השנייה נקרא Y (תלוי רק על $W(T)$). נבצע M_1 סימולציות לייצור וקטורים של ערכים של X, Y ונשתמש בהם למצוא אומדנים ל- $\mathrm{cov}(X,Y)$ ו- $\mathrm{Var}(Y)$. אחר כך רצים עוד סימולציה "גדולה" שבה, במקום למדוד את הערכים של X, מודדים את הערכים של

$$X_* = X - \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)}(Y-\mathbf{E}[Y])$$

כאשר $\mathbf{E}[Y]$ נתונה על ידי הנוסחה המדוייקת.

(ג) לבדוק את היעילות יש להשוות את השונויות של X ו- X_*. הטעות במומטה-קרלו (ל-X) מתנהגת כ-

$$\frac{\sigma(X)}{\sqrt{M}}$$

כאשר M זה מספר הסמולציות, ולכן אם $\mathrm{Var}(X_*) < \mathrm{Var}(X)$ ניתן להוריד את מספר ההרצות על ידי גורם של $\frac{\mathrm{Var}(X_*)}{\mathrm{Var}(X)}$ ולשמור על אותה טעות . יש את ה"עלות" של M_1 ההרצות למצוא את המקדמים הרלוונטיים, אבל ניתן להסתמך על אחוז קטן של מספר הסמולציות שמשתמשים בסמולציה הגדולה.

לגבי בחירת Σ אפשר באופן נומרי לשנות קצת את Σ ולראות האם זה מעלה או מוריד את הקורלציה של X ו- Y.

3. כתוב את שיטת קרנק-ניקולסון עבור המשוואה

$$u_t = u_{xx} - au \ , \qquad 0 < x < 1 \ , t > 0$$

עם תנאי שפה

$$u_x(0,t) = b \ , \qquad u(1,t) = c \ .$$

כאן a, b, c הם קבועים חיוביים נתונים. יש לנסח את המשוואות שיש לפתור כדי להתקדם בזמן, אין צורך להתייחס לשאלה איך בפועל פותרים את המשוואות.

על ידי שימוש בשיטת וון-נוימן לבדיקת יציבות, בדוק ששיטת קרנק-ניקולסון היא יציבה לבעיה זו, בלי שום תנאי על הצעד בזמן.

כרגיל, נכתוב u_{ij}, $i = 0, \ldots, N$, $j \geq 0$ לקירוב ל- $u(ih, jk)$ כאשר k, $h = \frac{1}{N}$ הם הצעדים בזמן ובמרחב. שיטת אויילר היא

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - au_{i,j} \ , \qquad 1 \leq i \leq (N-1)$$

ולכן שיטת קרנק ניקולסון

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - au_{i,j} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} - au_{i,j+1}\right]$$

או

$$-\frac{k}{2h^2}u_{i+1,j+1} + \left(1 + \frac{k}{h^2} + \frac{1}{2}ak\right)u_{i,j+1} - \frac{k}{2h^2}u_{i-1,j+1} = \frac{k}{2h^2}u_{i+1,j} + \left(1 - \frac{k}{h^2} - \frac{1}{2}ak\right)u_{i,j} + \frac{k}{2h^2}u_{i-1,j}$$

תנאי שפה ב- $x = 1$: $u_{N,j} = c$.

תנאי שפה ב- $x = 0$: $u_{2,j} - 4u_{1,j} + 3u_{0,j} = -2hb$

ניתן להשתמש בתנאי השפה לחלץ את $u_{0,j}, u_{N,j}$ וככה נשאר מערכת תלת-אלכסונית.

כדי לבדוק יציבות נציב $u_{i,j} = \lambda^j e^{i\sqrt{-1}\mu}$ יש לדורש

$$\lambda\left[-\frac{k}{2h^2}e^{\sqrt{-1}\mu} + \left(1 + \frac{k}{h^2} + \frac{1}{2}ak\right) - \frac{k}{2h^2}e^{-\sqrt{-1}\mu}\right] = \frac{k}{2h^2}e^{\sqrt{-1}\mu} + \left(1 - \frac{k}{h^2} - \frac{1}{2}ak\right) + \frac{k}{2h^2}e^{-\sqrt{-1}\mu}$$

כלומר

$$\lambda = \frac{1 - \frac{k}{h^2} - \frac{1}{2}ak + \frac{k}{h^2}\cos\mu}{1 + \frac{k}{h^2} + \frac{1}{2}ak - \frac{k}{h^2}\cos\mu} = \frac{1 - \frac{2k}{h^2}\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}ak}{1 + \frac{2k}{h^2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}ak}$$

לכל x חיובי $\frac{1-x}{1+x}$ הוא קטן מ- 1 ולכן השיטה תמיד יציבה.

---

4. כתוב קטע קוד במטלב:

<u>או</u> לפתור את הבעיה בשאלה 3, כלומר לפתור את המשוואה הנתונה בעזרת שיטת קרנק-ניקולסון, עם תנאי השפה הנתונים, ותנאי התחלה

$$u(x, 0) = c + b(x - 1)$$

ניתן להניח שנתונים ערכים של a, b, c. התוכנית תצייר את הגרפים של

$$u(x,0), u(x,0.25), u(x,0.5), u(x,0.75), u(x,1)$$

<u>או</u> לעשות סמולציה הרלוונטית לשאלה 2, לבדוק, עבור ערכים שונים של Σ , את הקורלציה בין הערך של הסל בזמן T והערך של משתנה הבקרה S בזמן T, כדי להחליט על הערך המתאים של Σ. ניתן להניח שנתונים ערכים לפרמטרים $r, \sigma_1, \ldots, \sigma_{30}, \eta_1, \ldots, \eta_{30}$. התוכנית תצייר גרף של ערכים של הקורלציה כפונקציה של Σ.

צריך קודם כל לעבוד קצת יותר על המשוואות. נכתוב

$$A = \frac{k}{2h^2}\ , \qquad B1 = 1 + \frac{k}{h^2} + \frac{ak}{2}\ , \qquad B2 = 1 - \frac{k}{h^2} - \frac{ak}{2}$$

ואזי המשוואות הם

$$-Au_{i+1,j+1} + B1u_{i,j+1} - Au_{i-1,j+1} = \mathrm{rhs}_i \qquad i = 1, \ldots, N-1$$

כאשר

$$\mathrm{rhs}_i = Au_{i+1,j} + B2u_{i,j} + Au_{i-1,j}$$

יש שני מקרים מיוחדים: כאשר $i = N-1$ יש לנו $u_{N,j+1} = c$ ולכן המשוואה היא

$$B1u_{N-1,j+1} - Au_{N-2,j+1} = \mathrm{rhs}_{N-1} + Ac$$

כאשר $i = 1$ יש לנו

$$u_{0,j+1} = -\frac{2}{3}hb - \frac{1}{3}u_{2,j+1} + \frac{4}{3}u_{1,j+1}$$

ולכן המשוואה היא

$$-\frac{2A}{3}u_{2,j+1} + \left(B1 - \frac{4A}{3}\right)u_{1,j+1} = \mathrm{rhs}_1 - \frac{2}{3}hbA$$

המקרים המיוחדים קובעים את הרכיבים בשורה הראשונה והאחרונה של המערכת התלת-אלכסונית שיש לפתור כדי לעבור מזמן j לזמן $j+1$. הנה קטע קוד שכתבתי:

```
a=1;     % or whatever the values are
b=1;
c=1;


N=20;    % number of steps in x direction
M=40;    % number of steps in t direction, multiple of 4
h=1/N;   % stepsize in x direction
k=1/M;   % stepsize in t direction
x=(0:N)*h;
t=(0:M)'*k;
```

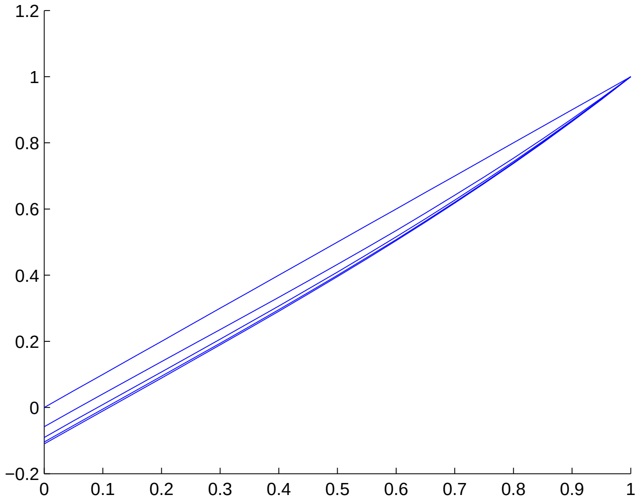
```
A=k/2/h^2;
B1=1+k/h^2+a/2;
B2=1-k/h^2-a/2;
maindi=B1*ones(1,N-1);
maindi(1)=B1-4*A/3;
upperdi=-A*ones(1,N-2);
upperdi(1)=-2*A/3;
lowerdi=-A*ones(1,N-2);


u=zeros(M+1,N+1);
u(1,:)=c+b*(x-1);
u(:,N+1)=c*ones(M+1,1);


for j=1:M
  rhs = A*u(j,3:(N+1))+B2*u(j,2:N)+A*u(j,1:(N-1));
  rhs(1) = rhs(1) - 2*h*b*A/3 ;
  rhs(N-1) = rhs(N-1) + A*c ;
  u(j+1,2:N)=tridiag(maindi,upperdi,lowerdi,rhs);
  u(j+1,1) = -2*h*b/3 - u(j+1,3)/3 + 4*u(j+1,2)/3;    % dont forget this!
end


hold on
plot(x,u(1,:))
plot(x,u(M/4+1,:))
plot(x,u(M/2+1,:))
plot(x,u(3*M/4+1,:))
plot(x,u(M+1,:))
```

שנתן את הגרף הזה:



(לא רלוונטי בשבילנו, אבל המצב המתמשך הוא

$$u(x) = \frac{(1+e)e^x + e(1-e)e^{-x}}{1+e^2}$$

עם $u(0) \approx -0.1135$ בהתאם לגרף.)

```
r = ... ;               % value of r
sigma = [ ... ];        % vector of 30 values
eta   = [ ... ];        % vector of 30 values
initprices = [ ... ]; % vector of 30 values - initial values of each share in basket
S0 = sum(initprices); % initial price of whole basket
N = length(sigma);      % number of shares in basket
T = ... ;               % time


M = 5000            % number of simulations
Z = randn(M,N+1)    % N+1 random numbers for each simulation - use first column for W(T)
                    % preferable to use same values for every choice of Sigma


% simulate basket prices
B=zeros(M,1);
for i=1:N
    B = B + initprice(i)*exp( (r-(sigma(i)^2+eta(i)^2)/2)*T + ...
              ... sqrt(T)*(sigma(i)*Z(:,1) + eta(i)*Z(:,i+1)) );
end
```

```
% now start comparing different values of Sigma. first find the one I wrote in q. 3
Sigma0:=2*(r-1/T*log(sum( initprices .* exp( (r-sigma.^2/2)*T ) )/sum(initprices)));
Sigma=(1:200)/100*Sigma0;      % values of Sigma to check - from small to 2*Sigma0
C=zeros(size(Sigma));          % put the correlations here


% now find the correlation for each value of Sigma
for i=1:size(Sigma)
     S = S0 * exp( (r-Sigma(i)^2/2)*T + sqrt(T)*Sigma(i)*Z(:,1) ) ;
     q = cov(B,S) ;
     C(i) = q(1,2)/sqrt(q(1,1)*q(2,2)) ;
end


plot(Sigma, C)
```

---

5. רוצים לפתור את בעיית השפה החופשית

$$\begin{array}{l} u_t = u_{xx} + x \qquad 0 < x < s(t)\ ,\quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 2 \\ u(s(t),t) = u_x(s(t),t) = 0 \\ u(x,0) = (x-1)^2\ , \qquad s(0) = 1 \end{array}$$

על ידי החלפת המשתנים

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & ys(\tau) \\ t & = & \tau \end{array} \right.$$

נסח את הבעייה כבעייה על התחום הקבוע $0 < y < 1$ והסבר בקצרה איך ניתן לפתור את הבעייה החדשה עם שיטת אויילר.

על ידי כלל השרשרת

$$\begin{array}{rcl} \partial_y & = & \dfrac{\partial x}{\partial y}\partial_x + \dfrac{\partial t}{\partial y}\partial_t = s(\tau)\partial_x \\ \partial_\tau & = & \dfrac{\partial x}{\partial \tau}\partial_x + \dfrac{\partial t}{\partial \tau}\partial_t = s'(\tau)y\partial_x + \partial_t = \partial_t + y\dfrac{s'(\tau)}{s(\tau)}\partial_y \end{array}$$

ולכן הבעייה החדשה היא

$$
\begin{aligned}
&u_\tau = \frac{1}{s(\tau)^2} u_{yy} + y\frac{s'(\tau)}{s(\tau)} u_y + s(\tau) y \qquad 0 < y < 1\ , \quad \tau > 0\\
&u_y(0,\tau) = 2s(\tau)\\
&u(1,\tau) = u_y(1,\tau) = 0\\
&u(y,0) = (y-1)^2\ , \qquad s(0) = 1
\end{aligned}
$$

כרגיל, נכתוב u_{ij}, $i = 0,\ldots,N$, $j \geq 0$ לקירוב ל- $u(ih, jk)$ כאשר k, $h = \frac{1}{N}$ הם הצעדים בזמן ובמרחב. נכתוב גם s_j כקירוב ל- $s(jk)$. שיטת אויילר היא

$$
\begin{aligned}
&u_{i,j+1} = \frac{1}{s_j^2} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + ih\frac{s_{j+1} - s_j}{s_j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + s_j ih \qquad 1 \leq i \leq (N-1)\\
&u_{2,j} - 4u_{1,j} + 3u_{0,j} = -2hs_j\\
&u_{N,j} = u_{N-2,j} - 4u_{N-1,j} = 0\\
&u_{i,0} = (ih-1)^2\ , \qquad s_0 = 1
\end{aligned}
$$

הרעיון של יישום השיטה הוא כזה: מתחילים עם $\{u_{i,j}\}_{i=0}^N$ ו- s_j. אם היינו גם יודעים את s_{j+1} היינו יכולים להשתמש במשוואה הראשונה למצוא את $\{u_{i,j+1}\}_{i=1}^{N-1}$, ובמשוואה השניה מצוא את $u_{0,j+1}$, ומהמשוואה השלישית $u_{N,j+1} = 0$. נשאר ליישם את חלק השני של המשוואה השלישית $u_{N-2,j+1} = 4u_{N-1,j}$. ולכן הרעיון הוא לתאם את s_{j+1} עד שהתנאי האחרון מתקיים. בפועל עושים את זה עם שיטת ניוטון. עם נחשוב על $u_{N-2,j+1} - 4u_{N-1,j}$ כפונקציה f של s_{j+1} עושים

$$
s_{j+1} \to s_{j+1} - \frac{f(s_{j+1})}{f'(s_{j+1})}
$$

החל מקירוב ראשון $s_{j+1} \approx s_j$.
