בס"ד

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית, פרופ' ג'רמי שיף, 88-902-02

מבחן מועד ב', סמסטר ב' תש"ע

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. (א) כתוב את שיטת אויילר-מרויימה ואת שיטת מילשטיין לפתרון המד"ס

$$dX = -aXdt + bX^2dW$$

כאשר a, b הם קבועים חיוביים. נכון או לא נכון: התוחלות של הפתרונות שמקבלים על ידי שתי השיטות הן שוות. נמק.

(ב) אם יש צורך ליישם אחת השיטות מסעיף א' במחשב שאין בו מחולל מספרים אקראיים נורמליים, אבל יש בו מחולל מספרים אקראיים אחידים, מה ניתן לעשות?

2. לאופציה מיוחדת יש את התכונות הבאות:

- אם המחיר הממוצע $\overline{S}$ של נכס הבסיס משך השנה הראשונה של החיים של האופציה הוא מעל K, אזי בסוף השנה הראשונה כותב האופציה משלם למחזיק האופציה את הסכום $\overline{S} - K$.
- אחרת, בסוף השנה הראשונה של החיים של האופציה, האופציה הופכת להיות אופצית call אירופאית סטנדרטית, אם מחיר מימוש K, וזמן מימוש אחרי עוד שנה (כלומר, שנתיים אחרי הנפקת האופציה).

כתוב קוד מטלב לתמחר אופציה זו, (א) על ידי שימוש בנוסחת GBM לסמלץ את מחירי נכס הבסיס בכל הזמנים הרלוונטיים, ו-(ב) על ידי שימוש גם בנוסחת בלק שולס לקבוע את הערך של אופציה אירופאית רלוונטית במקרה ו- $\overline{S} \le K$. יש להניח ש"ממוצע" הרלוונטי הוא הממוצע של מחירים בסוף ימי המסחר, וניתן להשתמש בפונקציה blsprice(Price, Strike, Rate, Time, Volatility) במטלב למצוא את המחיר של אופציה אירופאית.

לאיזה שיטה תהיה שונות נמוכה יותר ? מהיא השם של שיטה זו להורדת שונות ?

3. (א) הוכח שאם המשתנים הסטוכסטיים X, Y מקיימים את המערכת

$$\begin{aligned} dX &= Y\ dt + \lambda\ dW \\ dY &= (-2X - 3Y)\ dt + \mu\ dW \end{aligned}$$

כאשר λ, μ הם קבועים, אזי

$$u(x, y, t) = \mathbf{E}[\Phi(X(T), Y(T))|X(t) = x, Y(t) = y]$$

מקיים את המשוואה

$$u_t + yu_x - (2x + 3y)u_y + \frac{1}{2}\left(\lambda^2 u_{xx} + 2\lambda\mu u_{xy} + \mu^2 u_{yy}\right) = 0$$

(ב) בדוק שלמשוואה הזאת יש 2 פתרונות

$$\begin{aligned} u_1 &= (2x+y)e^{-(T-t)} - (x+y)e^{-2(T-t)} \\ u_2 &= u_1^2 + k(t) \end{aligned}$$

כאשר $k(t)$ היא פונקציה מסויימת של t לבד, שיש למצוא (מספיק למצוא $\frac{dk}{dt}$). מה הן הפונקציות Φ הרלוונטיות ?

(ג) מה ניתן להסיק, מסעיף ב', לגבי $\mathrm{Var}(X(T)|X(t)=x, Y(t)=y)$?

4. (א) אם f היא פונקציה חלקה (גזירה כמה פעמים שצריך) ויודעים את

$$f(x), f(x+h), f\left(x-\frac{1}{2}h\right)$$

עבור h חיובי קטן, איך ניתן למצוא אומדנים ל- $f'(x)$ ו- $f''(x)$? מה הם סדרי הגודל של הטעויות של אומדונים אלה?

(ב) רוצים לפתור את המשוואה $u_t = u_{xx} + f(x)$ בקטע $0 < x < 1$, כאשר f היא פונקציה נתונה, ונתון ש- $u(0,t) = u(1,t) = 0$. כדי לקבל את הפתרון עם דיוק יותר טוב עבור ערכים נמוכים של x, מציעים לחלק את הקטע $0 < x < 1$ לתת-קטעים עם אורך $h = \frac{1}{20}$ עבור $x < 0.5$, ועם אורך $h = \frac{1}{10}$ עבור $x > 0.5$, ולהשתמש בשיטת אויילר. איזה בעיות יש בגישה זו ?

5. הסבר את שיטת קרנק-ניקולסון לפתרון הבעיה

$$u_t = u_{xx} - u(1-u) \ , \qquad 0 < x < 1 \ , t > 0$$

אם תנאי שפה והתחלה

$$u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 1 - x$$

יש לכתוב את המשוואות שיש לפתור כדי לקדם את הפתרון בזמן, וגם להסביר איך בפועל ניתן לפתור משוואות אלה.

בהצלחה!