בס"ד

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית, פרופ' ג'רמי שיף, 88-902-02

מבחן מועד ב', סמסטר ב' תש"ע

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. (א) כתוב את שיטת אויילר-מרויימה ואת שיטת מילשטיין לפתרון המד"ס

$$dX = -aXdt + bX^2dW$$

כאשר a, b הם קבועים חיוביים. נכון או לא נכון: התוחלות של הפתרונות שמקבלים על ידי שתי השיטות הן שוות. נמק.

(ב) אם יש צורך ליישם אחת השיטות מסעיף א' במחשב שאין בו מחולל מספרים אקראיים נורמליים, אבל יש בו מחולל מספרים אקראיים אחידים, מה ניתן לעשות?

(א) למשוואה

$$dX = a(X)dt + b(X)dW$$

שיטת אויילר מרויימה היא

$$X_{n+1} = X_n + ha(X_n) + \sqrt{h}b(X_n)W_n \qquad W_n \sim N(0,1)$$

ושיטת מילשטין היא

$$X_{n+1} = X_n + ha(X_n) + \sqrt{h}b(X_n)W_n + \frac{1}{2}b(X_n)b'(X_n)(W_n^2 - 1) \qquad W_n \sim N(0,1)$$

למשוואה שלנו אויילר היא

$$X_{n+1} = X_n - ahX_n + \sqrt{h}bX_n^2W_n \qquad W_n \sim N(0,1)$$

ומילשטיין היא

$$X_{n+1} = X_n - ahX_n + \sqrt{h}bX_n^2W_n + b^2X_n^3(W_n^2 - 1) \qquad W_n \sim N(0,1)$$

בגלל ש(בשתי השיטות) W_n ו- X_n הם ב"תים, ו- $\mathbf{E}[W_n] = \mathbf{E}[W_n^2 - 1] = 0$, יש לנו שבשתי השיטות

$$\mathbf{E}[X_{n+1}] = (1 - ah)\mathbf{E}[X_n]$$

ולכן אפשר להגיד שהתוחלות של הפתרונות שוות.

(ב) ברמה זו של הדיוק, ההתפלגות המדוייקת של W_n איננה רלוונטית, רק חשוב ש- $\mathbf{E}[W_n] = 0$ ו- $\mathrm{Var}(W_n) = 1$. ולכן ניתן לקחת $W_n = \sqrt{12}\left(U_n - \frac{1}{2}\right)$ כאשר U_n מתפלג אחיד בקטע $[0, 1]$. כלומר W_n אחיד בקטע $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

---

2. לאופציה מיוחדת יש את התכונות הבאות:

- אם המחיר הממוצע $\overline{S}$ של נכס הבסיס משך השנה הראשונה של החיים של האופציה הוא מעל K, אזי בסוף השנה הראשונה כותב האופציה משלם למחזיק האופציה את הסכום $\overline{S}-K$.
- אחרת, בסוף השנה הראשונה של החיים של האופציה, האופציה הופכת להיות אופצית call אירופאית סטנדרטית, אם מחיר מימוש K, וזמן מימוש אחרי עוד שנה (כלומר, שנתיים אחרי הנפקת האופציה).

כתוב קוד מטלב לתמחר אופציה זו, (א) על ידי שימוש בנוסחת GBM לסמלץ את מחירי נכס הבסיס בכל הזמנים הרלוונטיים, ו-(ב) על ידי שימוש גם בנוסחת בלק שולס לקבוע את הערך של אופציה אירופאית רלוונטית במקרה ו- $\overline{S}\le K$. יש להניח שה"ממוצע" הרלוונטי הוא הממוצע של מחירים בסוף ימי המסחר, וניתן להשתמש בפונקציה
blsprice(Price, Strike, Rate, Time, Volatility) במטלב למצוא את המחיר של אופציה אירופאית.

לאיזה שיטה תהיה שונות נמוכה יותר ? מהיא השם של שיטה זו להורדת שונות ?

לדוגמה:

```
S0=1;           % initial price
r=0.0002;       % in units of days
sigma=0.001;    % in units of days
K=1.05;
N=252;          % number of days in year
M=5000;         % number of simulations
r1=r-sigma^2/2;


Z=randn(M,N+1);
S=S0*ones(M,N+2);      % first N+1 cols are end of day prices for first year
                       % last col is end of year price for second year
for i=1:N
    S(:,i+1)=S(:,i).*exp(r1+sigma*Z(:,i));
end
S(:,N+2)=S(:,N+1).*exp(N*r1+sigma*sqrt(N)*Z(:,N+1));
Sbar=mean(S(:,2:(N+1)),2);


PA=exp(-N*r)*(Sbar-K).*(Sbar>K);                             % value if Sbar>K
PB1=exp(-2*N*r)*(S(:,N+2)-K).*(S(:,N+2)>K).*(Sbar<=K);     % value if Sbar<=K - method
PB2=exp(-N*r)*blsprice(S(:,N+1),K,r,N,sigma).*(Sbar<=K);   % value if Sbar<=K - method
```

```
P1=PA+PB1;
P2=PA+PB2;
[mean(P1),std(P1),std(P1)/sqrt(M)]
[mean(P2),std(P2),std(P2)/sqrt(M)]


% run 1
% ans =    0.0505    0.0220    0.0003
% ans =    0.0504    0.0156    0.0002
% run 2
% ans =    0.0504    0.0223    0.0003
% ans =    0.0503    0.0159    0.0002
```

כמו שניתן לראות מהתוצאות, השונות היא נמוכה יותר בשיטה השנייה - זאת היא "שיטת ההתנייה" להורדת שונות. בעצם, בגלל שמשתמשים בנוסחת בלק-שולס, לוקחים בחשבון את כל האפשרויות לשנה השנייה, ולא רק מסמלצים תקופה זו - ולכן הטעות הסטוכסטית יורדת.

---

3. (א) הוכח שאם המשתנים הסטוכסטיים X, Y מקיימים את המערכת

$$\begin{aligned} dX &= Y\ dt + \lambda\ dW \\ dY &= (-2X - 3Y)\ dt + \mu\ dW \end{aligned}$$

כאשר λ, μ הם קבועים, אזי

$$u(x, y, t) = \mathbf{E}[\Phi(X(T), Y(T)) | X(t) = x, Y(t) = y]$$

מקיים את המשוואה

$$u_t + yu_x - (2x + 3y)u_y + \frac{1}{2}\left(\lambda^2 u_{xx} + 2\lambda\mu u_{xy} + \mu^2 u_{yy}\right) = 0$$

(ב) בדוק שלמשוואה הזאת יש 2 פתרונות

$$\begin{aligned} u_1 &= (2x + y)e^{-(T-t)} - (x + y)e^{-2(T-t)} \\ u_2 &= u_1^2 + k(t) \end{aligned}$$

כאשר $k(t)$ היא פונקציה מסויימת של t לבד, שיש למצוא (מספיק למצוא $\frac{dk}{dt}$). מה הן הפונקציות Φ הרלוונטיות?

(ג) מה ניתן להסיק, מסעיף ב', לגבי $\mathrm{Var}(X(T) | X(t) = x, Y(t) = y)$?

(א) תזכורת של פיינמן-כץ למערכת

$$dX_i = a_i(X,t)dt + \sum_{a=1}^{d} b_{ia}(X,t)dW^a \ , \qquad i = 1,\dots,n$$

אם

$$u(x,t) = \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r(X(s),s)ds\right)\Phi(X(T))|X(t)=x\right]$$

אזי $u(x,t)$ הוא הפתרון של

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{a=1}^{d} b_{ia}b_{ja}u_{x_ix_j} = ru$$

עם

$$u(x,T) = \Phi(x)$$

במקרה שלנו $n=2$, $a=1$ וכותבים $X_1 = X$, $X_2 = Y$. אזי

$$\begin{aligned} &a_1(X,Y,t) = Y \ , \qquad a_2(X,Y,t) = -2X - 3Y \\ &b_{11}(X,Y,t) = \lambda \ , \qquad b_{21}(X,Y,t) = \mu \end{aligned}$$

ולוקחים $r=0$. מיד מקבלים את המשוואה הנדרשת . בנוסף, $u(x,y,T) = \Phi(x,y)$.

(ב) המשוואה:

$$u_t + yu_x - (2x+3y)u_y + \frac{1}{2}\left(\lambda^2 u_{xx} + 2\lambda\mu u_{xy} + \mu^2 u_{yy}\right) = 0$$

פתרון מוצע ראשון:

$$u_1 = (2x+y)e^{-(T-t)} - (x+y)e^{-2(T-t)}$$

יש לבדוק ש-

$$\begin{aligned} u_{1t} &= -(2x+y)e^{-(T-t} - 2(x+y)e^{-2(T-t)} \\ u_{1x} &= 2e^{-(T-t)} - e^{-2(T-t)} \\ u_{1y} &= e^{-(T-t)} - e^{-2(T-t)} \\ u_{1xx} &= u_{1xy} = u_{1yy} = 0 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} & u_{1t} + yu_{1x} - (2x+3y)u_{1y} + \frac{1}{2}\left(\lambda^2 u_{1xx} + 2\lambda\mu u_{1xy} + \mu^2 u_{1yy}\right) \\ =\ & (-(2x+y)e^{-(T-t)} - 2(x+y)e^{-2(T-t)}) + y(2e^{-(T-t)} - e^{-2(T-t)}) - (2x+3y)(e^{-(T-t)} - e^{-2(T-t)}) \\ =\ & 0 \end{aligned}$$

כנדרש. ו- $\Phi(x,y) = u_1(x,y,T) = x$.

פתרון מוצע שני: $u_2 = u_1^2 + k(t)$ היות הנגזרות השניות של u_1 מתאפסות יש

$$\begin{aligned} u_{2t} &= 2u_1u_{1t} + k'(t) \\ u_{2x} &= 2u_1u_{1x} \\ u_{2y} &= 2u_1u_{1y} \\ u_{2xx} &= 2u_{1x}^2 \\ u_{2xy} &= 2u_{1x}1y \\ u_{2yy} &= 2u_{1y}^2 \end{aligned}$$

ו-

$$\begin{aligned} & u_{2t} + yu_{2x} - (2x+3y)u_{2y} + \frac{1}{2}\left(\lambda^2 u_{2xx} + 2\lambda\mu u_{2xy} + \mu^2 u_{2yy}\right) \\ = \; & 2u\left(u_{1t} + yu_{1x} - (2x+3y)u_{1y}\right) + k'(t) + \left(\lambda^2 u_{1x}^2 + 2\lambda\mu u_{1x}u_{1y} + \mu^2 u_{1y}^2\right) \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

אם

$$\frac{dk}{dt} = -\left(\lambda^2 u_{1x}^2 + 2\lambda\mu u_{1x}u_{1y} + \mu^2 u_{1y}^2\right)$$

הצד ימין אינו תלוי ב- x, y, היא פונקציה של t לבד. לפתתרון השני יש לנו

$$\Phi(x,y) = u_2(x,y,T) = x^2 + k(T)$$

(ג) אם בסעיף הקודם נבחר $k(T) = 0$, אזי לפתרון השני יש לנו $\Phi(x,y) = x^2$. ולכן

$$\begin{aligned} & \mathrm{Var}(X(T)|X(t)=x, Y(t)=y) \\ = \; & \mathbf{E}(X(T)^2|X(t)=x, Y(t)=y) - \mathbf{E}(X(T)|X(t)=x, Y(t)=y)^2 \\ = \; & u_2 - u_1^2 \\ = \; & k(t) \end{aligned}$$

בין היתר זה אינו תלוי בערכים של x, y, דבר שניתן לבדוק על ידי שיטת מונטה קרלו.

---

4. (א) אם f היא פונקציה חלקה (גזירה כמה פעמים שצריך) ויודעים את

$$f(x), f(x+h), f\left(x - \frac{1}{2}h\right)$$

עבור h חיובי קטן, איך ניתן למצוא אומדנים ל- $f'(x)$ ו- $f''(x)$? מה הם סדרי הגודל של הטעויות של אומדונים אלה?

(ב) רוצים לפתור את המשוואה $u_t = u_{xx} + f(x)$ בקטע $0 < x < 1$, כאשר f היא פונקציה נתונה, ונתון ש- $u(0,t) = u(1,t) = 0$. כדי לקבל את הפתרון עם דיוק יותר טוב עבור ערכים נמוכים של x, מציעים לחלק את הקטע $0 < x < 1$ לתת-קטעים עם אורך $h = \frac{1}{20}$ עבור $x < 0.5$, ועם אורך $h = \frac{1}{10}$ עבור $x > 0.5$, ולהשתמש בשיטת אויילר. איזה בעיות יש בגישה זו ?

(א)

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\dots \\ f(x) &= f(x) \\ f\left(x-\frac{h}{2}\right) &= f(x)-\frac{h}{2}f'(x)+\frac{h^2}{8}f''(x)-\frac{h^3}{48}f'''(x)+\dots \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} f(x+h)+2f\left(x-\frac{h}{2}\right)-3f(x) &= \frac{3h^2}{4}f''(x)+O(h^3) \\ f(x+h)-4f\left(x-\frac{h}{2}\right)+3f(x) &= 3hf'(x)+O(h^3) \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} f''(x) &\approx \frac{4f(x+h)+8f\left(x-\frac{h}{2}\right)-12f(x)}{3h^2} \\ f'(x) &\approx \frac{f(x+h)-4f\left(x-\frac{h}{2}\right)+3f(x)}{3h} \end{aligned}$$

הטעות בראשונה היא $O(h)$ הטעות בשנייה היא $O(h^2)$

(ב) בשיטת אויילר עם $h=\frac{1}{10}$ בכל הקטע, במקום לעבוד עם $u(x,t)$ עובדים עם קירובים u_{ij}, $0\le i\le 10$, $j\ge 0$, כאשר

$$u_{ij}\approx u(ih,jk)=u\left(\frac{i}{10},jk\right)$$

(k הוא הצעד בזמן.) בשיטת אויילר עם $h=\frac{1}{20}$ עובדים עם קירובים u_{ij}, $0\le i\le 20$, $j\ge 0$ כאשר

$$u_{ij}\approx u\left(\frac{i}{20},jk\right)$$

בשיטה ההיברידית המוצעת עובדים עם u_{ij}, $0\le i\le 15$, $j\ge 0$ כאשר

$$u_{ij}\approx\begin{cases} u\left(\frac{i}{20},jk\right) & 0\le i\le 10 \\ u\left(\frac{1}{2}+\frac{i-10}{10},jk\right) & 10\le i\le 15 \end{cases}$$

כתוצאה מתנאיי השפה, $u_{0,j}=u_{15,j}=0$ לכל j. שיטת אויילר למשוואה $u_t=u_{xx}+f(x)$ היא

$$u_{i,j+1}=u_{i,j}+k\left(\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+f(x_i)\right)$$

כאן, עבור $0<i<10$ יש לקחת $h=\frac{1}{20}$ ו- $x_i=\frac{i}{20}$. עבור $10<i<15$ יש לקחת $h=\frac{1}{10}$ ו- $x_i=\frac{1}{2}+\frac{i-5}{10}$. כאשר $i=10$ לא ניתן להשתמש בקירוב הסטנדרטי ל- u_{xx} וצריך את הקירוב מסעיף א':

$$u_{i,j+1}=u_{i,j}+k\left(\frac{4u_{11,j}-12u_{10,j}+8u_{9,j}}{\frac{3}{100}}+f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

יש שתי בעיות עיקריות - יש בעיית היציבות הסטנדרטית של שיטת אויילר, אבל יש בעייה נוספת שהקירוב המיוחד ל- u_{xx} שצריך להשתמש בו בנקודה $x = \frac{1}{2}$ סובלת מטעות מסדר גודל $O(h)$ במקום ה- $O(h^2)$ הסטנדרטית. זה לא ברור איך זה ישפיע אבל לא בהכרח יהיה יתרון על שיטה עם h קבוע.

---

5. הסבר את שיטת קרנק-ניקולסון לפתרון הבעיה

$$u_t = u_{xx} - u(1-u) \ , \qquad 0 < x < 1 \ , t > 0$$

אם תנאי שפה והתחלה

$$u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 1 - x$$

יש לכתוב את המשוואות שיש לפתור כדי לקדם את הפתרון בזמן, וגם להסביר איך בפועל ניתן לפתור משוואות אלה.

במקום הפונקציה $u(x,t)$ עובדים עם קירובים $u_{i,j}$, $0 \le i \le N$, $j \ge 0$, כך ש-

$$u_{i,j} \approx u(ih, jk)$$

כאשר $h = \frac{1}{N}$ הוא הצעד במרחב ו- $k > 0$ הוא הצעד בזמן. מתנאי השפה

$$u_{0,j} = 0 \qquad u_{N,j} = 1$$

לכל $j \ge 0$. מתנאי ההתחלה

$$u_{i,0} = 1 - ih$$

לכל i בין 0 ל- N - יש לשים לב שאין סתירה בין תנאי השפה ותנאי ההתחלה - הם מתאימים.

שיטת אויילר למשווה היא

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - u_{i,j}(1 - u_{i,j}) \ , \qquad 1 \le i \le N-1$$

שיטה זו היא שיטה מפורשת לבניית $\{u_{i,j+1}\}_{i=1}^{N-1}$ מ- $\{u_{i,j}\}_{i=1}^{N-1}$. "שיטה מפורשת" - הכוונה שניתן לכתוב נוסחה מפורשת "$u_{i,j+1} =$ משהו" כאשר פה ה"משהו" הוא ידוע במונחים של $\{u_{i,j}\}_{i=1}^{N-1}$.

שיטת קרנק-ניקולסון היא השיטה

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} &= \frac{1}{2}\Bigg(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - u_{i,j}(1 - u_{i,j}) \\ &\quad + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} - u_{i,j+1}(1 - u_{i,j+1})\Bigg) \qquad 1 \le i \le N-1 \end{aligned}$$

זו שיטה סתומה - יש פה $N-1$ משוואות ב- $N-1$ הנעלמים $\{u_{i,j+1}\}_{i=1}^{N-1}$ שיש לפתור בבת אחת.

השיטה המומלצת לפתרון המערכת הזאת של משוואות היא שיטת ניוטון. נסמן על ידי $\mathbf{u}$ את הווקטור עם רכיבים $\{u_{i,j+1}\}_{i=1}^{N-1}$, היינו הווקטור של לא-ידועים. ניתן לכתוב את מערכת המשוואות בצורה $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0$. שיטת ניוטון היא שיטה איטראטיבית לפתרון המשוואות

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - (\mathbf{f}'(\mathbf{u^n}))^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{u^n})$$

כאן $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$ מסמנת את המטריצה של נגזרות ראשונות של $\mathbf{f}$ - בגלל הצורה המיוחדת של המשוואות שלנו מטריצה זו תהיה תלת-אלכסנות, ויהיה קל למצוא $(\mathbf{f}'(\mathbf{u}))^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{u})$

ניתן לבנות קירוב ראשון $\mathbf{u}^0$ להתחיל את התהליך האיטראטיבי על ידי שיטת אויילר. שיטת ניוטון בדרך כלל יתכנס תוך מספר קטן של צעדים.

בהצלחה!