בס"ד

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית, פרופ' ג'רמי שיף, 88-902-02

מבחן מועד א', סמסטר ב' תשע"א

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. שאלה 5 היא חובה. ניקוד כל השאלות שווה.
יש לנמק היטב כל תשובה.

1. (א) כתוב את שיטת אויילר-מרוימה לפתרון המד"ס

$$\mathrm{d}X = \alpha X \mathrm{d}t + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 X^2}\mathrm{d}W \ , \qquad X(0) = x$$

כאן α, β, γ, x הם קובעים חיוביים נתונים.

(ב) רוצים למצוא את

$$\phi(T) = \mathbf{P}\left(\min_{0\le t\le T} X(t) \le 0\right)$$

כאשר $X(t)$ הוא הפתרון של המד"ס מהסעיף הקודם. כלומר רוצים לדעת, לפתרון של המד"ס מהסעיף הקודם, מהיא ההסתברות שהפתרון נופל מתחת ל- 0 תוך זמן T. הסבר בקצרה איך ניתן לחשב את $\phi(T)$ בעזרת שיטת אויילר-מרוימה ושיטת מונטה-קרלו.

(ג) הסבר מהם מקורות הטעות בתהליך שהסברת בסעיף הקודם, ואת התלויות של הטעויות על הפרמטרים הרלוונטים.

(ד) ההסתברות $\phi(T)$ היא תלויה בפרמטרים $\alpha, \beta, \gamma, x, T$. האם לדעתך $\phi(T)$ היא פונ-קציה עולה או פונקציה יורדת של (כל אחד מ-) חמשת הפרמטרים ?

2. המחירים $S_1(t), S_2(t)$ של שתי מניות מקיימים את המד"סים

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S_1 &= S_1\left(r\mathrm{d}t + \sigma_{11}\mathrm{d}W_1 + \sigma_{12}\mathrm{d}W_2\right)\\ \mathrm{d}S_2 &= S_2\left(r\mathrm{d}t + \sigma_{21}\mathrm{d}W_1 + \sigma_{22}\mathrm{d}W_2\right)\end{aligned}$$

כאשר $r, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$ הם קבועים, ו- $W_1(t), W_2(t)$ הם תהליכי וינר בלתי תלויים. לאופציה מסויימת על שתי מניות אלה יש תגמול

$$\max\left(S_1(T) - K_1, S_2(T) - K_2, 0\right)$$

כאשר K_1, K_2 הם קבועים.

(א) הסבר איך ניתן לייצר דגימות של המחירים $S_1(T), S_2(T)$ (בהנתן $S_1(0), S_2(0)$) ואיך ניתן, בעזרת דגימות כאלה, לקבל אומדן לערך של האופציה.

(ב) איך היית צריך לשנות את תהליך תמחור האופציה אם מוסיפים תנאי שהאופציה לא משלמת שום תגמול במידה והמחיר הממוצע של המניות, $\frac{1}{2}(S_1(t) + S_2(t))$, נופל מתי שהוא מתחת למחסום B בתקופה $0 \le t \le T$?

(ג) הסבר למה במקרה ש- $S_2(0)$ הוא הרבה מתחת ל- K_2 האופציה המקורית מתנהגת כאופצית call רגילה על המניה הראשונה. איך ניתן לנצל את זה לשפר את חישוב אומדן ערך האופציה ?

3. (א) מצא צירוף ליניארי של $f(x-h), f(x), f(x+h), f(x+2h)$ שהוא קירוב ל- $f'''(x)$.

(ב) ניתן להראות ש-

$$f'''(x) = \frac{\frac{1}{2}f(x+2h) - f(x+h) + f(x-h) - \frac{1}{2}f(x-2h)}{h^3} + O(h^2)$$

העזר בקירוב זה לנגזרת השלישית לכתוב גרסה של שיטת אויילר למשוואה $u_t = u_{xxx}$ (אין צורך להתייחס לתנאיי שפה או תנאי התחלה).

(ג) העזר בשיטת וון נוימן להראות שהשיטה שכתבת בסעיף הקודם איננה יציבה.

4. רוצים לפתור את הבעייה

$$\begin{gathered} u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < p(t),\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_x(0,t) = \alpha\ ,\quad u(p(t),t) = \beta \end{gathered}$$

כאן $p(t)$ ו- $f(x)$ הן פונקציות נתונות, ו- α, β הם קבועים נתונים.

(א) הוכח שעל ידי ההצבה

$$\begin{cases} x &= p(s)y \\ t &= s \end{cases}$$

ניתן לכתוב את הבעיה בצורה

$$\begin{gathered} u_s = a(s)u_{yy} + b(s)yu_y \qquad 0 < y < 1,\ s > 0 \\ u(y,0) = f(p(0)y) \\ u_y(0,s) = c(s)\ ,\quad u(1,s) = \beta \end{gathered}$$

כאשר $a(s), b(s), c(s)$ הן פונקציות שיש למצוא.

(ב) כתוב את שיטת Crank-Nicolson לבעיה בסעיף הקודם. יש להתייחס באופן מלא לתנאיי השפה.

5. כתוב קוד מטלב

<u>או</u> לתמחר את האופציה המתוארת בשאלה 2. יש להשתמש בשיטה שהצעת בסעיף 2 (ג) לשפר את הקירוב, בהנחה ש- $S_2(0)$ הוא מספיק מתחת ל- K_2.

<u>או</u> לפתור את הבעיה (המקורית) המתוארת בשאלה 4. יש להעזר בהצבה המוצעת בסעיף 4 (א) ובשיטת Crank-Nicolson. הפלט צריך להיות מטריצה של ערכים של $u(x,t)$ עבור ערכים של t בתחום $0 < t < 2$.

בהצלחה!