בס"ד

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית, פרופ' ג'רמי שיף, 88-902-02

מבחן מועד א', סמסטר ב' תשע"א

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. שאלה 5 היא חובה. ניקוד כל השאלות שווה.
יש לנמק היטב כל תשובה.

1. (א) כתוב את שיטת אויילר-מרוימה לפתרון המד"ס

$$\mathrm{d}X = \alpha X \mathrm{d}t + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 X^2}\mathrm{d}W \ , \qquad X(0) = x$$

כאן α, β, γ, x הם קובעים חיוביים נתונים.

(ב) רוצים למצוא את

$$\phi(T) = \mathbf{P}\left(\min_{0\le t\le T} X(t) \le 0\right)$$

כאשר $X(t)$ הוא הפתרון של המד"ס מהסעיף הקודם. כלומר רוצים לדעת, לפתרון של המד"ס מהסעיף הקודם, מהיא ההסתברות שהפתרון נופל מתחת ל- 0 תוך זמן T. הסבר בקצרה איך ניתן לחשב את $\phi(T)$ בעזרת שיטת אויילר-מרוימה ושיטת מונטה-קרלו.

(ג) הסבר מהם מקורות הטעות בתהליך שהסברת בסעיף הקודם, ואת התלויות של הטעויות על הפרמטרים הרלוונטים.

(ד) ההסתברות $\phi(T)$ היא תלויה בפרמטרים $\alpha, \beta, \gamma, x, T$. האם לדעתך $\phi(T)$ היא פונ-קציה עולה או פונקציה יורדת של (כל אחד מ-) חמשת הפרמטרים ?

(א) בוחרים אורך צעד $h > 0$ ומייצרים קירובים X_n ל- $X(nh)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, על ידי

$$X_{n+1} = X_n + h\alpha X_n + \sqrt{h}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 X_n^2} Z_n$$

כאשר $Z_n \sim N(0,1)$ ו- $X_0 = x$.

(ב) יש לעשות הרבה הרצות של התהליך המתואר בסעיף הקודם. יש לקחת $h = \frac{T}{N}$ כאשר N הוא שלם גדול, ונציין את מספר ההרצות על ידי M. לכל הרצה יש למצוא את

$$\min_{0\le n\le N} X_n$$

ונסמן את מספר ההרצות שעבורם מינימום זה קטן או שווה 0 על ידי m. הקירוב ל- $\phi(T)$ הוא

$$p = \frac{m}{M}$$

.

(ג) יש שני מקורות של טעות, ה"טעות הדטרמיניסטית" שמקורה בזה ש- h הוא סופי, כלומר N הוא סופי. טעות זו היא $O\left(\frac{1}{N}\right)$. ה"טעות הסטוכסטית", שמקורה בזה ש- M הוא סופי, היא $O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$. ליתר דיוק, האומדן לטעות הסטוכסטית פה הוא $\sqrt{\frac{p(1-p)}{M}}$. (כי אנחנו מחשבים פה את התוחלת של משתנה ברנולי עם הסתברות p.)

(ד) אם לא מתייחסים לאיבר הסטוכסטי במשוואה, המשוואה מתארת גידול מעריכי עם קצב α. לכן כל ש- α יותר גדול יש פחות סיכוי שהתהליך ירד מתחת ל- 0. כמו כן כאשר x גדל - כל שמתחילים יותר גבוה יש פחות סיכוי לרדת ל- 0. כל ש β ו- γ הם יותר גבוהים, יש יותר תנודות סטוכסטיות. לכן גידול ב- β או γ מעלה את $\phi(T)$. כמו כן, כל ש- T יותר גדול יש יותר זמן לרדת ל- 0, ולכן הגדלת T גם מעלה את $\phi(T)$.

---

2. המחירים $S_1(t), S_2(t)$ של שתי מניות מקיימים את המד"סים

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_1 &= S_1\left(r\mathrm{d}t + \sigma_{11}\mathrm{d}W_1 + \sigma_{12}\mathrm{d}W_2\right) \\ \mathrm{d}S_2 &= S_2\left(r\mathrm{d}t + \sigma_{21}\mathrm{d}W_1 + \sigma_{22}\mathrm{d}W_2\right) \end{aligned}$$

כאשר $r, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$ הם קבועים, ו- $W_1(t), W_2(t)$ הם תהליכי וינר בלתי תלויים. לאופציה מסויימת על שתי מניות אלה יש תגמול

$$\max\left(S_1(T) - K_1, S_2(T) - K_2, 0\right)$$

כאשר K_1, K_2 הם קבועים.

(א) הסבר איך ניתן לייצר דגימות של המחירים $S_1(T), S_2(T)$ (בהנתן $S_1(0), S_2(0)$) ואיך ניתן, בעזרת דגימות כאלה, לקבל אומדן לערך של האופציה.

(ב) איך היית צריך לשנות את תהליך תמחור האופציה אם מוסיפים תנאי שהאופציה לא משלמת שום תגמול במידה והמחיר הממוצע של המניות, $\frac{1}{2}(S_1(t) + S_2(t))$, נופל מתי שהוא מתחת למחסום B בתקופה $0 \le t \le T$?

(ג) הסבר למה במקרה ש- $S_2(0)$ הוא הרבה מתחת ל- K_2 האופציה המקורית מתנהגת כאופצית call רגילה על המניה הראשונה. איך ניתן לנצל את זה לשפר את חישוב אומדן ערך האופציה ?

(א) נכתוב

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2}\,, \qquad \sigma_2 = \sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2}$$

אזי

$$\begin{aligned} S_1(T) &= S_1(0)\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)T + \sigma_{11}W_1(T) + \sigma_{12}W_2(T)\right) \\ S_2(T) &= S_2(0)\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)T + \sigma_{21}W_1(T) + \sigma_{22}W_2(T)\right) \end{aligned}$$

ניתן לכתוב $W_1(T) = \sqrt{T}Z_1$ ו- $W_2(T) = \sqrt{T}Z_2$, כאשר Z_1, Z_2 הם משתנים מקריים נורמליים סטנדרטיים בלתי-תלויים. על ידי דגימות של Z_1, Z_2 מוצאים דגימות של $S_1(T), S_2(T)$, ועל ידי זה דגימות של

$$X = \max(S_1(T) - K_1, S_2(T) - K_2, 0)$$

ניתן לחזור על תהליך זה M פעמים, ולעשות ממוצע של הערכים של X המתקבלים, וזה, כפול גורם ההיוון e^{-rT}, מההוה אומדן מונטה-קרלו לערך של האופציה.

(ב) התהליך בסעיף הקודם הוא קל, בזה שמחיר האופציה הוא רק תלוי על הערכים של תהליכי הוינר בסוף הקטע. אם יש מחסום, יש צורך לדגום את מחירי המניות באמצע הקטע לדון האם עוברים את המחסום או לא. כלומר, במקום ללכת בקפיצה אחת של T יש צורך לעשות N קפיצות של $\frac{T}{N}$.

(ג) אם $S_2(0)$ הוא הרבה מתחת ל- K_2 אזי הסיכוי ש- $S_2(T)$ יהיה גדול מ- K_2 הוא קטן, והערך של האופציה הוא בדרך כלל $Y = \max(S_1(T) - K_1, 0)$, כלומר האופציה היא קרובה לאופצית call רגילה על המניה הראשונה.

ולכן ניתן להשתמש ב- Y כמשתנה בקרה לחישוב של התוחלת של X. במקום X נעבוד עם

$$X_c = X + c(Y - \mathbf{E}[Y])$$

כאשר לוקחים את c להיות אומדן של

$$-\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)}$$

השונות של X_c היא נמוכה מהשונות של X ולכן שיטת מונטה קרלו ל- X_c מתכנסת יותר מהר משיטת מונטה קרלו ל- X. כמובן, יודעים את $\mathbf{E}[Y]$ - זה מחיר בלק שולס לאופציה הרלוונטית על המניה הראשונה.

---

3. (א) מצא צירוף ליניארי של $f(x-h), f(x), f(x+h), f(x+2h)$ שהוא קירוב ל- $f'''(x)$.

(ב) ניתן להראות ש-

$$f'''(x) = \frac{\frac{1}{2}f(x+2h) - f(x+h) + f(x-h) - \frac{1}{2}f(x-2h)}{h^3} + O(h^2)$$

העזר בקירוב זה לנגזרת השלישית לכתוב גרסה של שיטת אויילר למשוואה $u_t = u_{xxx}$ (אין צורך להתייחס לתנאיי שפה או תנאי התחלה.)

(ג) העזר בשיטת וון נוימן להראות שהשיטה שכתבת בסעיף הקודם איננה יציבה.

(א) יש לנו תורי טיילור

$$\begin{aligned}
f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \dots \\
f(x) &= f(x) \\
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \dots \\
f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4}{3}h^3 f'''(x) + \dots
\end{aligned}$$

נסתכל על הצירוף הליניארי $af(x-h) - (a+b+c)f(x) + bf(x+h) + cf(x+2h)$.
המקדם של $hf'(x)$ הוא $b + 2c - a$ ולכן נקח $a = b + 2c$.
אז מעכשיו הצירוף שלנו הוא $(b+2c)f(x-h) - (2b+3c)f(x) + bf(x+h) + cf(x+2h)$.
המקדם של $h^2 f''(x)$ הוא $\frac{1}{2}(b+2c) + \frac{1}{2}b + 2c = b + 3c$. ולכן נקח $b - -3c$.
הצירוף עכשיו הוא $-cf(x-h) + 3cf(x) - 3cf(x+h) + cf(x+2h)$
המקדם של $h^3 f'''(x)$ הוא $\frac{1}{6}c - \frac{1}{2}c + \frac{4}{3}c = c$ כלומר יש לקחת $c = 1$.
מצאנו ש-

$$f'''(x) \approx \frac{-f(x-h) + 3f(x) - 3f(x+h) + f(x+2h)}{h^3}$$

(ב)

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{k}{h^3}\left(\frac{1}{2}u_{i+2,j} - u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - \frac{1}{2}u_{i-2,j}\right)$$

(ג) נחפש פתרון של הרקורסיה בסעיף הקודם בצורה

$$u_{i,j} = \lambda^i e^{j\sqrt{-1}\theta}$$

יש צורך ש

$$\lambda = 1 + \frac{k}{h^3}\left(\sqrt{-1}\sin 2\theta - 2\sqrt{-1}\sin\theta\right) = 1 + \frac{k\sqrt{-1}}{h^3}(\sin 2\theta - 2\sin\theta)$$

ולכן

$$|\lambda|^2 = 1 + \frac{k^2}{h^6}(\sin 2\theta - 2\sin\theta)^2 > 1$$

ואין יציבות.

---

4. רוצים לפתור את הבעייה

$$\begin{gathered} u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < p(t),\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_x(0,t) = \alpha\ ,\quad u(p(t),t) = \beta \end{gathered}$$

כאן $p(t)$ ו- $f(x)$ הן פונקציות נתונות, ו- α, β הם קבועים נתונים.

(א) הוכח שעל ידי ההצבה

$$\begin{cases} x &= p(s)y \\ t &= s \end{cases}$$

ניתן לכתוב את הבעיה בצורה

$$\begin{gathered} u_s = a(s)u_{yy} + b(s)yu_y \qquad 0 < y < 1,\ s > 0 \\ u(y,0) = f(p(0)y) \\ u_y(0,s) = c(s)\ ,\quad u(1,s) = \beta \end{gathered}$$

כאשר $a(s), b(s), c(s)$ הן פונקציות שיש למצוא.

(ב) כתוב את שיטת Crank-Nicolson לבעיה בסעיף הקודם. יש להתייחס באופן מלא לתנאיי השפה.

(א) על ידי כלל השרשרת

$$\begin{aligned} \partial_y &= \frac{\partial x}{\partial y}\partial_x + \frac{\partial t}{\partial y}\partial_t = p(s)\partial_x \\ \partial_s &= \frac{\partial x}{\partial s}\partial_x + \frac{\partial t}{\partial s}\partial_t = p'(s)y\partial_x + \partial_t = \partial_t + y\frac{p'(s)}{p(s)}\partial_y \end{aligned}$$

ולכן בקואורדינטות החדשות יש לנו

$$\begin{aligned}
&u_s - y\frac{p'(s)}{p(s)}u_y = \frac{1}{p(s)^2}u_{yy} \qquad 0<y<1\ ,\ s>0\\
&u(y,0)=f(p(0)y)\\
&u_y(0,s)=\alpha p(s)\ ,\quad u(1,s)=\beta
\end{aligned}$$

שזה מהצורה הנתונה עם

$$a(s)=\frac{1}{p(s)^2}\ ,\quad b(s)=\frac{p'(s)}{p(s)}\ ,\quad c(s)=\alpha p(s)$$

(ב) כרגיל, במקום $u(y,s)$ נעבוד עם $u_{i,j}$ שהוא קירוב ל- $u(ih,jk)$ כאשר $h=\frac{1}{N}$ הוא אורך הצעד בכיוון y ו- k הוא אורך הצעד בכיוון s.

שיטת Euler:

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} = a(jk)\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2} + ib(jk)\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2}$$

שיטת Crank-Nicolson:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} \;=\;& \frac{1}{2}\Bigg(a(jk)\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2} + ib(jk)\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2}\\
&+ a((j+1)k)\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2} + ib((j+1)k)\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i-1,j+1}}{2}\Bigg)
\end{aligned}$$

או

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{ka_{j+1}}{2h^2}-\frac{ikb_{j+1}}{4}\right)u_{i+1,j+1} + \left(1+\frac{ka_{j+1}}{h^2}\right)u_{i,j+1} + \left(-\frac{ka_{j+1}}{2h^2}+\frac{ikb_{j+1}}{4}\right)u_{i-1,j+1}\\
=\;&\left(\frac{ka_j}{2h^2}+\frac{ikb_j}{4}\right)u_{i+1,j} + \left(1-\frac{ka_j}{h^2}\right)u_{i,j} + \left(\frac{ka_j}{2h^2}-\frac{ikb_j}{4}\right)u_{i-1,j} \qquad (*)
\end{aligned}$$

איפה שכתבתי a_j במקום $a(jk)$ וכו'.

משוואה זו נכונה ל- $1\le i\le N-1$ ולכל $j\ge 0$.

תנאי התחלה: $u_{i,0}=f(p(0)ih)$, $i=0,\ldots,N$.

תנאי שפה: בשפה הימנית $u_{N,j}=\beta$. בשפה השמאלית, לשמור על דיוק טוב:

$$\frac{-u_{2,j}+4u_{1,j}-3u_{0,j}}{2h}=\alpha c_j$$

או

$$u_{0,j}=\frac{1}{3}\left(4u_{1,j}-u_{2,j}-2h\alpha c_j\right)$$

ההמשך אולי שייך יותר לשאלה 5. נכתוב את משוואת (*) בצורה

$$A_{i,j}u_{i+1,j+1}+B_{i,j}u_{i,j+1}+C_{i,j}u_{i-1,j+1}=Q_{i,j}$$

נשתמש במשוואה זו כאשר $2 \leq i \leq N-2$. כאשר $i=1$ ו- $i=N-1$ יש צורך לנצל את תנאי השפה. במקום המשוואה במקרה $i=N-1$ נשתמש ב-

$$A_{N-1,j}\beta + B_j u_{N-1,j+1} + C_{N-1,j} u_{N-2,j+1} = Q_{N-1,j}$$

במקום המשוואה במקרה $i=1$ נשתמש בצירוף ליניראי של שתי המשוואות

$$\begin{aligned} A_{1,j}u_{2,j+1} + B_j u_{1,j+1} + C_{1,j}u_{0,j+1} &= Q_{1,j} \\ -u_{2,j+1} + 4u_{1,j+1} - 3u_{0,j+1} &= 2h\alpha c_{j+1} \end{aligned}$$

שלא מופיע בו $u_{0,j+1}$. שזה

$$\left(A_{1,j} - \frac{1}{3}C_{1,j}\right)u_{2,j+1} + \left(B_j + \frac{4}{3}C_{1,j}\right)u_{1,j+1} = Q_{1,j} + \frac{2}{3}hC_{1,j}\alpha c_{j+1}$$

---

5. כתוב קוד מטלב

<u>או</u> לתמחר את האופציה המתוארת בשאלה 2. יש להשתמש בשיטה שהצעת בסעיף 2 (ג) לשפר את הקירוב, בהנחה ש- $S_2(0)$ הוא מספיק מתחת ל- K_2.

<u>או</u> לפתור את הבעיה (המקורית) המתוארת בשאלה 4. יש להעזר בהצבה המוצעת בסעיף 4 (א) ובשיטת Crank-Nicolson. הפלט צריך להיות מטריצה של ערכים של $u(x,t)$ עבור ערכים של t בתחום $0 < t < 2$.

אופציה ראשונה:

```
% option parameters
r   = 0.05;
s11 = 0.2;
s12 = 0.1;
s21 = -0.1;
s22 = 0.4;
K1  = 1.2;
K2  = 2.0;
S10 = 1.2;
S20 = 1.0;
T   = 2;
% small simulation of X and Y and finding their covariance
M  = 10000;
Z1 = randn(M,1);
Z2 = randn(M,1);
S1 = S10 * exp((r-s11^2/2-s12^2/2)*T + sqrt(T)*(s11*Z1 + s12*Z2) );
```

```
S2 = S20 * exp((r-s21^2/2-s22^2/2)*T + sqrt(T)*(s21*Z1 + s22*Z2) );
PX = exp(-r*T)*max( [S1-K1, S2-K2, zeros(M,1)] , [] , 2 );
PY = exp(-r*T)*max( [S1-K1, zeros(M,1)] , [] , 2 );
cm = cov(PX,PY);
c  = -cm(1,2)/cm(2,2);
% big simulation to do the option pricing
M  = 100000;
Z1 = randn(M,1);
Z2 = randn(M,1);
S1 = S10 * exp((r-s11^2/2-s12^2/2)*T + sqrt(T)*(s11*Z1 + s12*Z2) );
S2 = S20 * exp((r-s21^2/2-s22^2/2)*T + sqrt(T)*(s21*Z1 + s22*Z2) );
PX = exp(-r*T)*max( [S1-K1, S2-K2, zeros(M,1)] , [] , 2 );
PY = exp(-r*T)*max( [S1-K1, zeros(M,1)] , [] , 2 );
EY = blsprice( S10 , K1 , r, T , sqrt(s11^2+s12^2) );
XC = PX + c*(PY - EY);
[mean(PX) std(PX)/sqrt(M)  mean(XC) std(XC)/sqrt(M)]
```

הייתי צריך להוסיף הסברים אבל במקום זה אני אשים קצת תוצאות: הנה תוצאות של 20 הרצות. עמודה ראשונה (משמאל) תוחלת ללא שימוש במשתנה הבקרה, עמודה שנייה סטיית תקן ללא משתנה בקרה, עמודה שלישית תוחלת עם משתנה בקרה, עמודה רביעית סטיית תקן עם משתנה בקרה.

0.2499	0.0012	0.2496	0.0008
0.2523	0.0012	0.2507	0.0008
0.2482	0.0012	0.2483	0.0007
0.2495	0.0012	0.2498	0.0008
0.2488	0.0012	0.2492	0.0008
0.2476	0.0012	0.2498	0.0008
0.2475	0.0012	0.2494	0.0008
0.2508	0.0012	0.2496	0.0008
0.2507	0.0012	0.2497	0.0008
0.2523	0.0012	0.2521	0.0008
0.2480	0.0012	0.2490	0.0007
0.2509	0.0012	0.2507	0.0008
0.2470	0.0012	0.2482	0.0007
0.2492	0.0012	0.2493	0.0008

0.2498	0.0012	0.2497	0.0008
0.2529	0.0012	0.2505	0.0008
0.2478	0.0012	0.2498	0.0008
0.2489	0.0012	0.2502	0.0008
0.2498	0.0012	0.2497	0.0008
0.2472	0.0012	0.2486	0.0007

רואים ירידה של שליש בסטיית התקן, ואכן הטווח של התוצאות עם משתנה בקרה הוא יותר צר מהטווח ללא משתנה הבקרה.

אופציה שנייה:

still to do
