

זמן המבחן: שעתיים וחצי.

מוותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. שאלה 5 היא חובה. ניקוד כל השאלות שווה.

יש לנמק היטב כל תשובה.

1. התהליך הסטוכסטי $X(t)$ מקיים את המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dX = \alpha X dt + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 X^2} dW, \quad X(0) = x$$

כאשר α, β, γ, x הם קבועים חיוביים.

(א) הוכח שהתהליך $Y = \frac{1}{2}X^2$ מקיים את המד"ס

$$dY = \left((2\alpha + \gamma^2) Y + \frac{1}{2}\beta^2 \right) dt + \sqrt{2Y(\beta^2 + 2\gamma^2 Y)} dW, \quad Y(0) = \frac{1}{2}x^2$$

(ב) כתוב את שיטת מילשטיין למד"ס Y -ל מהסעיף הקודם.

(ג) הסבר בקצרה איך ניתן להשתמש בשיטת מילשטיין עם שיטת מונטה קרלו למצוא

קירוב ל- $E[Y(T)]$, כאשר T הוא קבוע חיובי.

(ד) האם ניתן למצוא את $E[Y(T)]$ בלי למצוא את המד"ס Y -ל? כלומר, האם ניתן למצוא

את $E[Y(T)]$ על ידי שימוש רק במד"ס X -ל?

2. המחיר $S(t)$ של נכס מסויים מתנהג לפי

$$dS = S(rdt + \sigma dW)$$

כאשר r, σ הם קבועים חיוביים. רוצים להשוות את המחירים ולחשב את הקורלציות של שלושה נגזרים:

(א) חוזה המשלם תגמול P אם עד לזמן T המחיר של הנכס גם עלה מעל 10% מהמחיר של היום וגם ירד מעל 10% מהמחיר של היום.

(ב) חוזה המשלם תגמול P אם ההפרש בין המחיר הגבוה והמחיר הנמוך בתקופה T הקורבה הוא גדול מ- 20% ממחיר הנכס היום.

(ג) חוזה המשלם תגמול P אם בסוף תקופת T המחיר של הנכס הוא יותר מ- 20% או מעל המחיר של היום או מתחת למחיר של היום.

(א) הסבר, בקצרה, בלי לכתוב פקודות מחשב, איך היית עושה סימולציה רלוונטית למצוא אומדנים למחירים של שלושת החוזים ומקדמי המתאם שלהם.

(ב) מהם מקורות הטעות בסימולציה? מהיא התלות של טעויות אלה על הפרמטרים הרלוונטיים בסימולציה?

(ג) מה ניתן להגיד על התלויות של התוצאות על הפרמטרים r, σ, T ?

3. (א) כתוב את שיטת אויילר למערכת

$$u_t = u_{xx} - 3u - 2v$$

$$v_t = v_{xx} + u$$

(אין צורך להתייחס לתנאי התחלה או תנאי שפה)

(ב) על ידי חיפוש פתרון של המשוואות שמקבלים בשיטת אויילר בצורה

$$u_{i,j} = \lambda^j e^{i\sqrt{-1}\theta}, \quad v_{i,j} = C\lambda^j e^{i\sqrt{-1}\theta}$$

כאשר C, λ, θ הם קבועים, הוכח שתנאי היציבות לשיטת אויילר למערכת זו היא

$$k \leq \frac{h^2}{2 + h^2}$$

4. רוצים לפתור את הבעיה

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} & a(t) < x < b(t), \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u(a(t), t) &= \alpha, \quad u(b(t), t) = \beta \end{aligned}$$

כאן $a(t), b(t)$ ו- $f(x)$ הן פונקציות נתונות, ו- α, β הם קבועים נתונים.

(א) הוכח שעל ידי ההצבה

$$\begin{cases} x = a(s) + [b(s) - a(s)]y \\ t = s \end{cases}$$

ניתן לכתוב את הבעיה בצורה

$$\begin{aligned} u_s &= p(s)u_{yy} + [q(s)y + r(s)]u_y & 0 < y < 1, \quad s > 0 \\ u(y, 0) &= f(a(0) + [b(0) - a(0)]y) \\ u(0, s) &= \alpha, \quad u(1, s) = \beta \end{aligned}$$

כאשר $p(s), q(s), r(s)$ הן פונקציות שיש למצוא.

(ב) כתוב את שיטת Crank-Nicolson לבעיה בסעיף הקודם. יש להתייחס באופן מלא לתנאיי השפה.

5. יש לענות או על סעיף (א) או על סעיף (ב)

(א) (המשך של שאלה מס' 1.) כתוב קוד מטלב לחשב את $E[Y(T)]$ במקרה ש- β הוא קטן, על ידי שימוש בפתרון המדויק

$$E[Y(T)] = \frac{1}{2}x^2 e^{(2\alpha + \gamma^2)T}$$

המתקבל במקרה $\beta = 0$ כמשתנה בקרה. אין צורך להצדיק נוסחה זו ל- $E[Y(T)]$ במקרה $\beta = 0$, אבל יש להתייחס בקצרה לטיב הקורלציה בין המשתנה המקורי ומשתנה הבקרה, ולתלותו על הפרמטרים בבעיה.

(ב) (המשך של שאלה מס' 3.) כתוב קוד מטלב להפעיל את שיטת אויילר למערכת המש-וואות בסעיף (א). יש לקחת את המשתנה x בקטע $[0, 1]$ ולהתייחס לתנאיי שפה

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1, \quad v_x(0, t) = -1, \quad v(1, t) = 0$$

ותנאיי התחלה

$$u(x, 0) = x, \quad v(x, 0) = 1 - x$$

המטרה היא לחשב את $u(x, t)$ ואת $v(x, t)$ בזמנים $t = 0.5, 1, 2$ ולצייר גרפים של הפתרונות בזמנים אלה.

בהצלחה!